シリーズ

応用計量経済学(4)

横浜市立大学商学部　松浦　克己
大阪大学国際公共政策研究科　Colin McKenzie

第４章　分散不均一

4.1　分散不均一の性質

$y_i = a + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + e_i$

を推計するとき、OLSに関して以下の古典的な仮定が成り立つことを前提としてきた。

A.1　$E(e_i) = 0$　誤差項の期待値は０。

A.2　$E(e_i^2) = \sigma^2$　誤差項の分散は均一。

A.3　$E(e_i e_j) = 0$　誤差項に系列相関はない。

A.4　$e_i \sim N(0, \sigma^2)$　誤差項は正規分布に従う。

A.5　x_{ji}　説明変数はある特定の値をとる非確率変数である。

ここではA.2の誤差項の分散は均一であるという仮定が満たされない場合の問題を考えてみる。分散均一（homoscedasticity, homoskedasticity）であるという仮定が充たされていないとき、これを誤差項の分散は不均一である、あるいは分散不均一、不均一分散（heteroscedasticity, heteroskedasticity）であるという。

第１章、第２章で我々は消費関数の例をみたが、所得が増大すればするほど人々の消費に対する裁量の余地は高くなる可能性がある。そうであれば消費関数における誤差のばらつきは低所得者と高所得者とでは異なるかもしれない。裁量の余地の大きい高所得者の方がバラツキは大きい可能性がある。あるいは貯蓄行動が高所得者・資産家とそうでない家計とでは、かなり様子が違うことがいわれている。この場合もバラツキは異なる可能性がある。この様に一般的に言って観察されるサンプル（あるいはその基になる母集団）でばらつき（discrepancy）が大きい（消費や所得、貯蓄など）と、誤差項もばらつきが大きくなるであろう。このような場合は、分散不均一の存在することが疑われる。

またＡというグループとＢというグループがたまたま一緒に観察されるとき、両者は平均は一致するが分散だけは異なるということもあるかもしれない。Chowテストでパラメータは共通するかどうかを検定したが、パラメータ（平均）は同一でも分散は異なるというケースである（これをdiscrete heteroskedasticityということがある)。

この二つのケースを図示したものが図4. 1、4. 2である。図4. 1の場合はx_iの値が大きくなるにつれてe_iの分散が大きくなっている。図4. 2は平均は同一であるが分散は異なるというdiscrete heteroskedasticityのケースを示している。

誤差項の分散が説明変数に応じて変わるとき、仮定のA.2は成立せずにx_{ij}に依存することになるので、これを

A.2′　$E(e_i^2) = \sigma_i^2$　4.1)

と表記することにする。サンプル毎に分散が異なることを明示するものである。すなわちこの場合は、$V(y_i) = E(y_i - E(y_i))^2 = E(e_i^2) = \sigma_i^2$である。

ところで分散不均一の問題を考えるとき、真の

図4.1　不均一分散の例

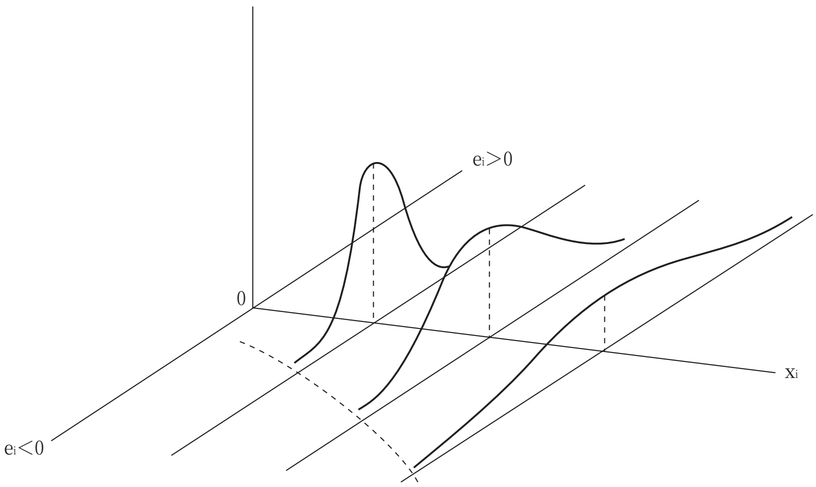
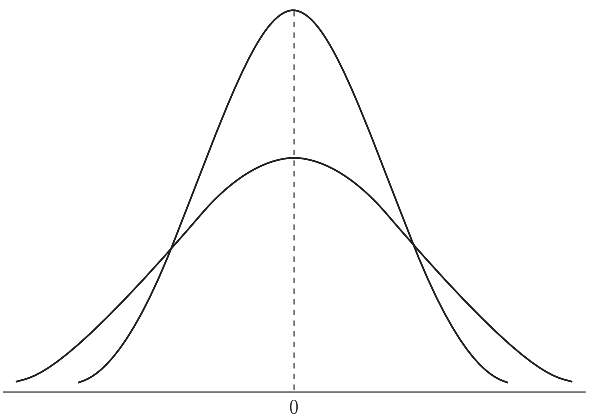


図4.2　discrete heteroskedasticityの例



分散不均一（pure heteroscedasticity）と見せかけの分散不均一（spurious heteroscedasticity）に分けて考察することが必要となる。

不均一分散の要因がz_iであるとしよう（z_iをproportionality factorということがある）。z_iは説明変数のx_{1i}やx_{2i}であるケースもあれば、モデルに含まれていない第三の変数であるときもある。誤差項の分散がz_iに依存するので、それを

$V(e_i)=\sigma^2 z_i^2$　　4.2)

と書くことにする[1]。このz_iがモデルの説明変数に含まれていない場合（omitted variable)、あるいは関数型を間違った場合（対数関数を用いる必要があるときに、レベルで推計するような事例）にみせかけの分散不均一が生じる。

真のモデルが以下のようであったとする。

$y_i=a+bx_i+cz_i+e_i$　　4.3)

このとき過小定式化で

$y_i=a+bx_i+u_i$　　4.4)

を推計したとする。u_iは以下のようになる。

$u_i=cz_i+e_i$　　4.5)

このとき仮定により、$E(u_i)=cz_i+ei$、

$u_i^2=c^2z_i^2+2cz_ie_i+e_i^2$となる。

これからu_iはcとz_iに依存することになり、z_iの絶対値が大きいほどu_iも大きくなる[2]。

これに対しz_iがモデルに含まれて、なおかつ分散不均一が起きるケースとしては以下のような場合がある。

一つはデータが集計されている場合である。たとえば消費と所得の原データをそれぞれ$Cons_i$と$Income_i$とし、消費と所得の集計データをそれぞれ$ConsG_i$と$IncomeG_i$とし、消費と所得の集計

1)　z_i^2とするのは分散を正とするためである。
2)　第2章で過小定式化の場合、推計値は一致性も不偏性もないことを指摘した。分散均一も誤るので、過小定式化は計量分析では非常に深刻な問題をもたらす。

データが

$$ConsG_1=(Cons_1+Cons_2)/2$$
$$IncomeG_1=(Income_1+Income_2)/2$$
$$ConsG_2=(Cons_3+Cons_4+Cons_5)/3$$
$$IncomeG_2=(Income_3+Income_4+Income_5)/3$$
$$ConsG_3=(Cons_6+Cons_7+Cons_8)/3$$
$$IncomeG_3=(Income_6+Income_7+Income_8)/3 \qquad 4.6)$$

で与えられていたとする。公表されている集計データは多くの場合これに該当する。他方で集計されていない原データに基づく式が

$$Cons_i=a+bIncome_i+u_i \qquad 4.7)$$

であったとする。ところが集計データを用いると

$$ConsG_j=a+bIncomeG_j+uG_j \qquad 4.8)$$

となる。この誤差項uG_jは

$$uG_1=(u_1+u_2)/2 \quad uG_2=(u_3+u_4+u_5)/3$$
$$uG_3=(u_6+u_7+u_8)/3$$

となる。仮定により$E(u_i)=0$であるから$E(uG_j)=0$、$E(u_iu_j)=0$と$E(u_i{}^2)=\sigma^2$から

$$E(uG_1{}^2)=E(u_1{}^2+2u_1u_2+u_2{}^2)/4=\sigma^2/2 \qquad 4.9)$$

となる。同様に$E(uG_2{}^2)=E(uG_3{}^2)=\sigma^2/3$となるので、分散は不均一となる。

もう一つの例はデフレーターの使用や基準化によって起こる場合である。i世帯の消費、所得と世帯人数をそれぞれC_i、Y_iとN_iとする。

真のモデルが

$$C_i/N_i=a+b(Y_i/N_i)+u_i \qquad 4.10)$$

とN_iで基準化されたものであるとする。すなわち一人当たりの消費と一人当たりの所得の関係が真のモデルであったとする。このとき基準化をしないで世帯の消費と世帯の所得の関係

$$C_i=c+bY_i+v_i \qquad 4.11)$$

を推計したとする。4.10）式と4.11）式から

$v_i=aN_i+u_iN_i$となる。u_iは標準的仮定を充たし、$E(u_i{}^2)=\sigma^2$なので

$$E(v_i)=aN_i$$
$$V(v_i)=E(v_i-E(v_i))^2=E(u_iN_i)^2=\sigma^2N_i{}^2 \qquad 4.12)$$

となり、分散はN_i^2に依存することになる。

分散不均一が存在するとき、その原因がどこにあるかは予め明らかでないことが多いであろう。そのときはモデルの定式化に問題（過小定式化や関数型の誤り）が無いかどうかを検討した方がよい。後述するように、真の分散不均一であればそれを除去する方法はあるが、見せかけの分散不均一であればそれは定式化を改める以外に解決策はないからである。

4.2　不均一分散のときのOLSの推定量と問題

$$y_i=a+bx_i+u_i$$

のOLSの推定量は$E(u_i)=0$、$E(u_iu_j)=Cov(u_i, u_j)=0$、$E(u_ix_i)=0$，$x_i$は非確率変数ということが充たされていれば

$\hat{b}=b+\dfrac{\Sigma(x_i-\bar{x})u_i}{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}$であるから、$E(\hat{b})=b$となり、分散不均一の場合も不偏推定量を得ることができる。しかし真の分散とは

$$V(\hat{b})=\frac{E(\Sigma(x_i-\bar{x})u_i)^2}{[\Sigma(x_i-\bar{x})^2]^2}=\frac{\Sigma[(x_i-\bar{x})^2E(u_i{}^2)]}{[\Sigma(x_i-\bar{x})^2]^2}$$

$$\neq\frac{\sigma^2}{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}=V_O(\hat{b}) \qquad 4.13)$$

となるので異なる。ここで$V_O(\hat{b})$は分散均一の場合の$\hat{b}$の真の分散である。

$V_O(\hat{b})$を推定するために$V_O(\hat{b})$にあるσ^2の代わりにOLSの推定量s^2を利用したものを

$$VE_O(\hat{b})=se(\hat{b})^2$$

とする。$VE_O(\hat{b})$は4.13）式にある真の分散の適切な推定量ではなくなる。また$\hat{b}$の有効性もなくなる。すなわち$\hat{b}$は最良線形不偏推定量（BLUE）ではない。

$VE_O(\hat{b})$は真の分散の適切な推定量ではないのでt検定

$t=\dfrac{\hat{b}-b}{se(\hat{b})}$を行うことはできない[3)]。

また係数制約に関するＦ検定も行うことはできない。

これらから分散均一の場合と不均一分散の場合の推定量の性質と検定の関係をまとめると以下のようである。

	分　散　均　一	分 散 不 均 一
不偏性	○	○
一致性	○	○
BLUE	○	×
分散の推定量	$E(VE_0(\hat{b}))=V_0(\hat{b}_i)$	$E(VE_0(\hat{b}_i))\neq V(\hat{b}_i)$
t検定	○	×
F検定	○	×

ただし、$VE_0(\hat{b}_i)$はEviews等のパッケージソフトによるOLSの推定で計算される分散の推定量、$V_0(\hat{b}_i)$と$V(\hat{b}_i)$はそれぞれ分散均一の場合と分散不均一の場合の係数推定量の真の分散である。

4.3　分散不均一の検定

$E(e_i^2)=\sigma_i^2$あるいは$E(e_i^2)=\sigma^2 z_i^2$をより一般的に書き換えると

$$E(e_i^2)=c+d_1z_{1i}+d_2z_{2i}+\cdots+d_sz_{si} \qquad 4.14)$$

を得る[4)]。分散が均一であるという帰無仮説と対立仮説は

$H_0：d_1=d_2=\cdots=d_s=0$（制約の数はs個）

$H_1：H_0$ではない（少なくとも１個の$d_i\neq 0$）

と表すことができる。分散均一と不均一分散の検定はこの考え方を基に行われる。

ここでは代表的な検定方法についてみてみよう。

（Goldfeld-Quandtテスト）

Goldfeld-Quandtテストはサンプルを分割し（subsample)、その分割されたサンプル間で分散が同一かどうかを検定しようというものである。たとえば時系列データを利用した分析で、ある時点で構造変化が起きた（為替制度の自由化の前後、オイルショックの前後等）とき、その前後で誤差項の分散も変化したことが疑われるようなケースである。あるいはクロスセクションデータの分析では、高所得者の消費関数と低所得者の消費関数で誤差項の分散が異なると考えらるようなケースである。

4.14）式を以下のように簡単化する。

$$E(e_i^2)=c+d_1z_{1i}$$
$$z_{1i}=0 \qquad i=1,\ \cdots,\ T$$
$$z_{1i}=1 \qquad i=T+1,\ \cdots,\ n \qquad 4.15)$$

これは第２章でみたダミー変数の考え方と同一である。これを利用すると

$$E(e_i^2)=c \qquad i=1,\ \cdots,\ T$$
$$E(e_i^2)=c+d_1 \qquad i=T+1,\ \cdots,\ n$$

となる。分散均一の帰無仮説と対立仮説は以下のように定式化される。

$H_0：d_1=0$

$H_1：d_1\neq 0$

Goldfeld-Quandtテストは時系列データでは次のように行われる。時間の順序によりサンプルを$i=1$からTまでと$i=T+1$からnまでに分割する。各々サンプル毎にOLSで推計する。

$$y_i=a+b_1x_{1i}+b_2x_{2i}+\cdots+b_kx_{ki}+e_{1i} \qquad i=1,\ \cdots,\ T \qquad 4.16a)$$

$$y_i=a+b_1x_{1i}+b_2x_{2i}+\cdots+b_kx_{ki}+e_{i2} \qquad i=T+1,\ \cdots,\ n \qquad 4.16b)$$

4.16a）式の分散（σ^2_1）の推定量をs_1^2、4.16b）式の分散（σ^2_2）の推定量をs_2^2とする。

分散が均一（$\sigma^2_1=\sigma^2_2$）であればs_1^2とs_2^2は近い

---

3) 多くの場合4.13）式の右辺の２番目の式は真の分散よりも小さくなるので、t検定を行えばb＝０の帰無仮説を棄却しにくいバイアスが生じると言われている。しかし厳密には帰無仮説が棄却されにくくなるかどうかを一般的にいうことはできない。

4) $E(e_i^2)=\sigma^2z_i^2$の場合$\sigma^2>0$と仮定するので、特殊ケースとして分散均一性をもつe_iが得られない。

値をとるので、s_1^2/s_2^2は１に近いであろう。逆に分散不均一（$\sigma^2_1 \neq \sigma^2_2$）であれば$s_1^2$と$s_2^2$は乖離した値をとるので、$s_1^2/s_2^2$は１からかなり離れているであろう。Goldfeld-Quandtテストは具体的には次のF検定による[5)]。

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

帰無仮説の下でFは自由度T－(k＋１)、(n－T)－(k＋１）のF分布に従う。このF分布の自由度はそれぞれ4.16a）式と4.16b）式の自由度と同一である。

さらにGoldfeld-Quandtテストは検出力を高めるために、真ん中のいくつかのサンプル（central observations）を除いて行われることがある。

すなわちサンプルを１からTまで、T＋１からT＋Sまで、T＋S＋１からnまでに分割し１からTまでのサンプルとT＋S＋１からnまでのサンプルを用いて4.16a）式と4.16b）式を推計しF検定を行うものである。

クロスセクションデータの場合は、ある説明変数（x_{ji}）あるいは被説明変数（y_i）の小さい順から大きい順に並べ替えて（昇順）、サンプルを２ないし３個に分割して推計しF検定を行う[6)]。

Goldfeld-Quandtテストでは、サンプルをどこで分割するかはあらかじめ明らかではない。経験的によく行われるのは時系列データであれば前半と後半（あるいはクロスセクションデータであれば上下）で１/２とすることである。真ん中のサンプルを除くときは１/３から１/６が除かれることが多い。

またGoldfeld-Quandtテストは分散不均一に影響する要因は１個であると仮定する点で制約的である。しかしこのサンプル分割の基準が既知ではないことや、要因を限定するという問題はあるものの、計算の容易さとサンプルが少ない少標本でも検定ができることからよく使われている。

（Breusch-Paganテスト、Whiteテスト）

分散不均一の要因（proportionality factor）が１個であると先験的に仮定する根拠は必ずしも無い。複数の要因が影響していることもあるであろう。また何が分散不均一の要因であるかを経済理論から事前に特定することも困難である。しかし我々としては複数の要因が影響している可能性を検証する必要に迫られるときもある。これに対応しようというのがWhiteテストやBreusch-Paganテストである。

この検定方法の考え方を直感的にいうと、誤差項の分散が均一の場合はその誤差項の分散は他の要因の影響を受けていないが、逆に分散不均一であれば何らかの要因の影響を受けているであろう、ということに注目するものである。4.14）式のように

$$E(e_i^2) = c + d_1 z_{1i} + \cdots + d_s z_{si}$$

という関数を考えるとき、これは回帰モデルのように見えるが$E(e_i^2)$という被説明変数を観測することができないとともに誤差項がない。まず$E(e_i^2)$の代わりにe_i^2を代入すると

$$e_i^2 = c + d_1 z_{1i} + \cdots + d_s z_{si} + v_i$$

---

5) 帰無仮説から明らかなようにこれは、これは両側検定で行われる。
　z～F(m, n）と書くとF(m, n)、(0.025）のケースでは、Pr(z＞F(m, n)、(0.025))＝0.025とし、F(m, n)、(0.975)＜F＜F(m, n)、(0.025）であれば帰無仮説は採択される。(分散は均一であるという帰無仮説は棄却されない)。F(m, n)、(0.975)＞F、あるいはF＞F(m, n)、(0.025)であれあ帰無仮説は棄却される。F(m, n)、(0.975)を計算するためにはF(m, n)、(0.975)＝１/F(m, n)、(0.025）という関係を利用すれば良い。
　ただし$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$を暗黙のうちに仮定して、片側検定が行われることもある。

6) 大きい順から小さい順（降順）に並べてもよい。また全サンプルをOLSで推計し、その誤差の大きい順から並べることもある。分割されたサンプルで説明変数、被説明変数あるいは誤差の大きなグループの方が、その誤差の分散も大きいであろうと想定している。並べ方がいずれかに統一されていることが重要である。

となり、$v_i = e_i^2 - E(e_i^2)$ なので$E(v_i) = 0$である。この式を推計し、$d_1 = \cdots = d_s = 0$を検定してやればよい。e_i^2を直接観測することができないので推計する必要がある。Breusch-Paganはこれを次のように提案した。まずモデルをOLSで推計する。

$$y_i = a + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + \cdots + b_k x_{ki} + e_i \quad i = 1, \cdots, n \qquad 4.17a)$$

4.17a）で推計された$\hat{e}_i^2$と$\sigma^2 = \Sigma\, \hat{e}_i^2/n$を用い次の人工的な補助回帰を行う。

$$\frac{\hat{e}_i^2}{\sigma^2} = c + d_1 z_{1i} + \cdots + d_s z_{si} + v_i \qquad 4.17b)$$

全てのz_{ji}が有意に影響しないならば（すなわち分散均一の帰無仮説が正しければ）、4.17b）式のR^2は小さく、方程式で説明し得た部分（regression sum of squares, ESS）も小さいであろう。Breusch-Paganテストの統計量は次による。

$$\frac{ESS}{2} \qquad 4.18a)$$

この統計量が自由度sのχ^2分布に従う。

また誤差項の正規性に問題がある場合は、4.18a）式の統計量は不安定であるといわれている。その場合は4.17b）式の決定係数をR^2とすると、

$$nR^2 \sim \chi^2_{(s)} \qquad 4.18b)$$

に従うことが知られているので、この統計量を用いる。これはラグランジュアン乗数検定（LM）の一つの例である。実際には計算が簡単なこともあり、4.18a）式よりも4.18b）式のnR^2の統計量が利用されることが多い。

Breusch-Paganテストは分散の関数形を特定化せず、複数の分散不均一を考慮している点で優れている[7)]。しかし、サンプル数が大きい（大標本）場合はかなり正確に検定を行うことができるが、少標本のケースでは正確性を欠く。そのために少標本の場合は、Goldfeld-Quandtテストによる方が妥当である。

Whiteテストは誤差項の正規性に問題がある場合のラグランジュアン乗数検定の例で、次のように行われる。

$$\hat{e}_i^2 = c + d_1 z_{1i} + \cdots + d_s z_{si} + v_i \qquad 4.19)$$

分散が均一であれば$d_1 = \cdots = d_s = 0$であるから、これを帰無仮説として検定する。

4.19）式から得られるnR^2が自由度sのχ^2分布に従う。このWhiteテストはBreusch-Paganテストの特殊ケースということもできる[8)]。なぜならば説明変数が同一であれば、4.17b）式の決定係数と4.19）式の決定係数は同じだからだである。

問題はz_{ji}の選択をどうするかである。この点について経済理論からはヒントを得ることはほとんどできない。Whiteはz_{ji}としては4.17a）式の説明変数(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i})の他に、その自乗項$(x_{1i}^2, x_{2i}^2, x_{3i}^2)$、３乗項（$x_{1i}^3, x_{2i}^3, x_{3i}^3$）等の高次項と説明変数の交差項（$x_{1i}x_{2i}$や$x_{1i}x_{3i}$等説明変数の任意の組み合わせ）を利用することを提案している。

4.4　Eviewsによる分散不均一の検定

第１章のクロスセクションデータを用いた消費関数で

$$\underset{}{yearcons_i} = \underset{(6.76)}{179.28} + \underset{(4.96)}{0.123} disposal_i + \underset{(1.71)}{0.009} money_i + \underset{(3.69)}{28.362} number_i + \hat{v}_i$$

AdjR² ＝0.370　　s ＝118.61

ssr ＝1574242　　n ＝123　（　）内はt値

---

7) 本文でBreusch-Paganテストを説明した時、分散不均一性が4.14）式によって発生するとした。しかし4.14）式の代わりに$E(e_i^2) = f(c + d_1 z_{1i} + \cdots + d_s z_{si})$を仮定してもBreusch-Paganテストは同一である。

8) 誤差項が被説明変数に依存する分散不均一（dependent-variable heteroscedasticity）が検討されることがある。被説明変数の期待値を$E(y_i)$と書くと

$V(e_i) = c + d(E(y_i))^2$を考えるものである。$E(\hat{y}_i)$を予測値y_iに置き換えて

$\hat{e}_i^2 = c + d\hat{y}_i^2 + v_i$

の推計式に関し、分散均一の帰無仮説の下で$d = 0$の検定を行う。

という結果を得ていた（なお$\mathrm{yearcons}_i$は年間消費支出、$\mathrm{disposal}_i$は年間可処分所得、money_iは金融資産、number_iは世帯人員、v_iは残差)。これを用いて分散不均一の検定を行ってみよう。

Eviewsのプログラムは次の通りである。

```
1  equation eq4_1. LS yearcons c disposal money number
   '残差を作る
2  series res1=resid
3  series res2=res1*res1
4  series s2=res2/(@ssr/@regobs)
   'Goldfeld-Quandt検定　データをdisposalの昇順でソートする
5  sort disposal
   'Goldfeld-Quandt検定　最初のサンプルの推計
6  smpl 1　50
7  equation eqGQ1. ls yearcons c disposal money number
8  scalar f1=@se*@se
   'Goldfeld-Quandt検定　真ん中を除いた最後のサンプルの推計
9  smpl 71　123
10 equation eqGQ2. ls yearcons c disposal money number
11 scalar f2=@se*@se
12 scalar GOLDQU=f1/f2
13 show GOLDQU
   'サンプルを全体に戻す
14 smpl @all
   '自乗項、3乗項を作る
15 series disp2=disposal*disposal
16 series disp3=disposal^3
17 series money2=money*money
18 series money3=money^3
19 series n2=number*number
20 series n3=number^3
   '交差項を作る
21 series dispmo=disposal*money
22 series dispnum=disposal*number
23 series moneynum=money*number
24 series dimonum=disposal*money*number
   'B_P検定の補助回帰
25 equation eq4_2. LS s2 c disposal money number disp2 disp3 money2 money3 n2 n3 dispmo dispnum moneynum dimonum
26 scalar bptest=(@ssr/(1-@r2)-@ssr)/2
27 show bptest
28 scalar bptest2=@regobs*@r2
29 show bptest2
   'WHITE検定の補助回帰
30 equation eq4_3. ls res2 c disposal money number disp2 money2 n2 dispmo dispnum moneynum
31 scalar white=@regobs*@r2
```

このプログラムではデータを既に読み込んだものとしている（第１章を参照されたい)。２行目で残差を作っている（residは方程式の残差を指すEviewsの用語である)。残差の動きと残差の正規性の検定を行ってみよう（なおこのデータセットは被説明変数のyearconsの昇順で並べられている)。第３章で説明したように４行目にある@ssrと@regobsはそれぞれ残差平方和とサンプル数である。

View/Actual, Fitted, Residual/Actual, Fitted, Residual Graph

を指示する。結果は図4. ３に示すとおりである。やや分散が増大傾向にあるように見えるがそれほどはっきりしたものではない。

次にこの残差が正規分布に従うかどうかをみる

図4.３　残差の動き

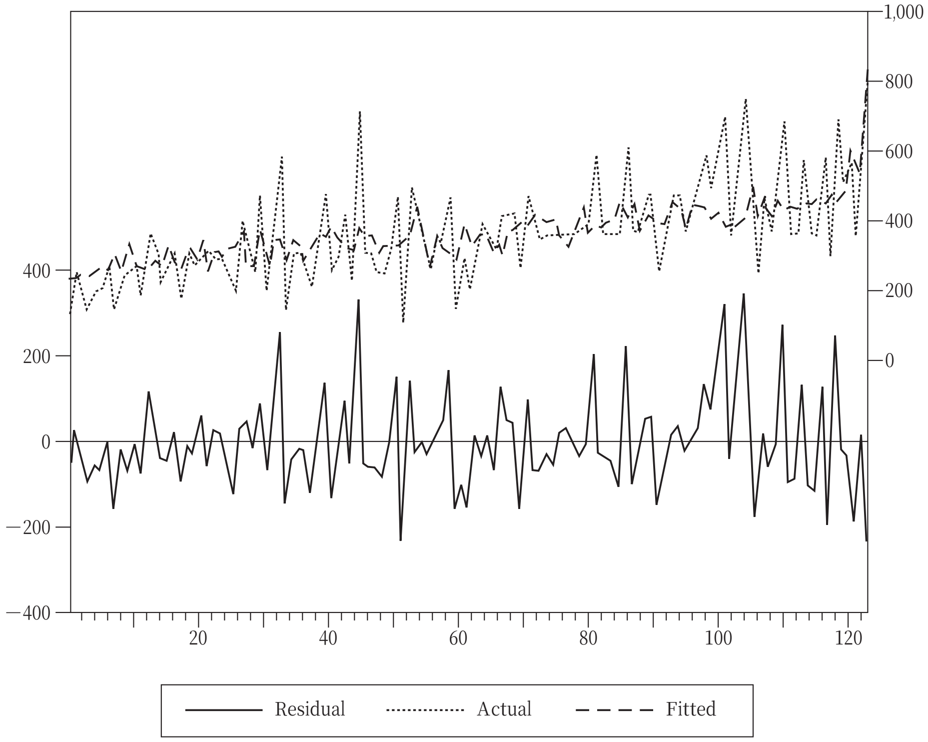
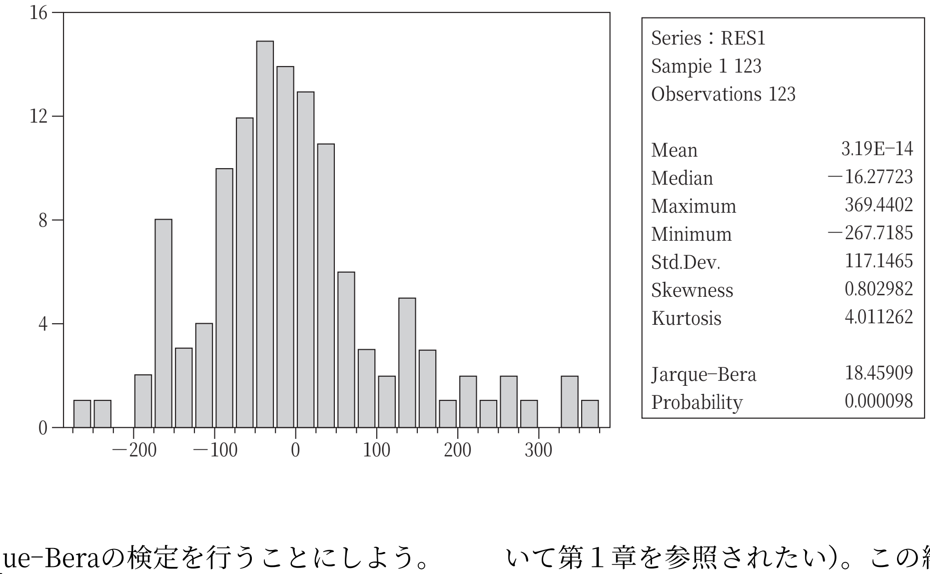


図4.４　正規性の検定



ためにJacque−Beraの検定を行うことにしよう。

Jacque−Beraの統計量（JB）はサンプルがn、推定のための方程式の係数がk個として

$$JB=\frac{(n-k)}{6}\left\{Skewness^2+\frac{1}{4}(Kurtosis-3)^2\right\} \quad 4.20)$$

で求められる（SkewnessとKurtosisの定義について第１章を参照されたい）。この統計量は当該変数が正規分布であるという帰無仮説の下で自由度２のχ^2分布にしたがう（片側検定で検定を行う。自由度２のχ^2分布の上側５％の値は5.991である）。これを利用する。

View/Residual Test/Histgram−Normality Test

結果は図4.４に示すとおりである。Jacque−

Beraの統計量は18.46であり、５％水準の臨界値を上回っている。p値から誤差項が正規分布に従うという帰無仮説は棄却されている。

このデータはクロス・セクション・データなのでGoldfeld-Quandtテストを行うためにある変数を選び、データをその変数の小さい順から大きい順に並べ替える必要がある。５行目ではデータをdisposalの昇順でソートしている。６－８行でGoldfeld-Quandtテストのために最初の50サンプルについて推計し、その残差平方和をf１として保存している。第３章で説明したように８行目にある@seは方程式の標準誤差である。９－11行で後半の71－123番目のサンプルについて推計し残差平方和をf２と名付けて保存している。12行で統計検定料をGOLDQUと名付けて計算している。各々の式の推計結果は表4.１、表4.２に掲げるとおりである。統計量は0.498である（**show GOLDQU**で画面左下に表示される）。

表4.１　Goldfeld-Quandtテスト１

Dependent Variable: YEARCONS
Method: Least Squares
Sample: 1 50
Included observations: 50

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	98.57707	38.93203	2.532030	0.0148
DISPOSAL	0.226154	0.133451	1.694654	0.0969
MONEY	0.024894	0.006819	3.650675	0.0007
NUMBER	33.20436	12.04759	2.756100	0.0084

R-squared	0.451129	Mean dependent var	274.8000
Adjusted R-squared	0.415333	S.D. dependent var	118.8001
S.E. of regression	90.83873	Akaike info criterion	11.93267
Sum squared resid	379577.0	Schwarz criterion	12.08563
Log likelihood	−294.3167	F-statistic	12.60281
Durbin-Watson stat	2.458798	Prob（F-statistic）	0.000004

表4.２　Goldfeld-Quandtテスト２

Dependent Variable: YEARCONS
Method: Least Squares
Sample: 71 123
Included observations: 53

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	365.0102	71.09193	5.134340	0.0000
DISPOSAL	0.077648	0.036987	2.099320	0.0410
MONEY	−0.001413	0.007655	−0.184633	0.8543
NUMBER	3.660797	14.30059	0.255989	0.7990

R-squared	0.092671	Mean dependent var	458.2642
Adjusted R-squared	0.037120	S.D. dependent var	131.2227
S.E. of regression	128.7642	Akaike info criterion	12.62631
Sum squared resid	812430.1	Schwarz criterion	12.77501
Log likelihood	−330.5973	F-statistic	1.668217
Durbin-Watson stat	2.124087	Prob（F-statistic）	0.186008

自由度46（50サンプル－４個の係数）と49（53サンプル－４個の係数）のF分布の上側2.5%の統計量は1.772、下側97.5%の値は0.561である。

$GOLDQU=0.498<0.561=F_{(46,49)}0.975$

であるから両側検定の５%水準で誤差項は分散均一であるという帰無仮説は棄却される。

次にBreusch-Paganテストに移る。15―24行で検定に必要な説明変数となる高次項や交差項を作成し、これを利用して25行で推計している（表4.３参照）。26行で4.17b)、4.18a）式の検定を行っている（ESS，RSS，R^2を方程式で説明し得た部分、残差平方和と決定係数とすると$1-R^2=RSS/(RSS+ESS)$である。これから$ESS=RSS/(1-R^2)-RSS$となる）。第３章で説明したようにR^2は@r２として保存されている。結果を**show** **bptest**で画面に表示する。

この統計量は33.072である。自由度13のχ^2分布の５%の値は22.362である。

$BP=33.072>22.362=\chi^2_{(13)}0.05$

であり、分散は均一であるという帰無仮説は５%水準で棄却される。

しかし推計された誤差項の正規性は棄却されているので、26行の統計量には問題がある。そこで28行でラグランジュ乗数テストを行っている。その結果は　$nR^2=21.965(=123*0.1786)$と計算される。結果は**show bptest2**で画面左下に表示される。

$BP2=21.965<22.362=\chi^2_{(13)}0.05$

であるから、分散は均一であるという帰無仮説は５%水準で棄却されない（採択される）。誤差項

表4.３　Breusch-Paganテストの補助回帰

Dependent Variable: S2
Method: Least Squares
Sample: 1123
Included observations: 123

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	−1.138685	1.284288	−0.886627	0.3772
DISPOSAL	0.002339	0.002575	0.908428	0.3657
MONEY	0.001458	0.000677	2.153616	0.0335
NUMBER	0.596478	1.398110	0.426631	0.6705
DISP 2	4.95E-06	2.94E-06	1.685442	0.0948
DISP 3	−1.77E-09	8.34E-10	−2.123703	0.0360
MONEY 2	−8.64E-08	1.11E-07	−0.779303	0.4375
MONEY 3	7.74E-12	7.41E-12	1.043666	0.2989
N 2	0.017099	0.441530	0.038726	0.9692
N 3	−0.002063	0.038928	−0.052983	0.9578
DISPMO	−2.23E-06	7.66E-07	−2.906802	0.0044
DISPNUM	−0.001336	0.000735	−1.817743	0.0719
MONEYNUM	−0.000365	0.000180	−2.027583	0.0450
DIMONUM	5.93E-07	2.06E-07	2.882127	0.0048

R-squared	0.178581	Mean dependent var	1.000000
Adjusted R-squared	0.080614	S.D. dependent var	1.742396
S.E. of regression	1.670690	Akaike info criterion	3.971156
Sum squared resid	304.2414	Schwarz criterion	4.291242
Log likelihood	−230.2261	F-statistic	1.822864
Durbin-Watson stat	2.233251	Prob（F-statistic）	0.048149

が正規分布に従わない場合、4.17b）式、4.18a）式に基づく検定量には問題があった。従ってこの場合はラグランジュ乗数テストの方がより妥当である可能性がある。

最後にWhiteテストを行ってみよう。30、31行のようにプログラムを作成して行うこともできるが、Eviewsは画面で行うことができる。

View/Residual Test/White Heteroskedasticity (no cross term)

View/Residual Test/White Heteroskedasticity (cross term)

最初は交差項を含まない検定、次は交差項を含む検定（30行のプログラムと同一となる）である。結果は表4．4、4．5に掲げるとおりである。

EviewsはF検定とχ^2分布に基づくラグランジュ乗数テストの検定と２通りを報告する。F検定は定数項以外のすべての説明変数の係数が０（$d_1=\cdots=d_k=0$）という帰無仮説を検定するものである。Obs*R-squaredはnR^2を用いたラグランジュ乗数テストの検定である（31行のプログラムと同一の結果となる）。

自由度６（交差項を利用しない場合）のχ^2分布の５％点は12．592、自由度９（交差項を利用する場合）では同じく16．919である。

$\text{White 1}=10.517<12.592=\chi^2_{(6)}0.05$

$\text{White 2}=12.205<16.919=\chi^2_{(9)}0.05$

であるから、いずれの場合も５％水準で分散均一の帰無仮説は棄却されない（p値は0．104と0．202である）。またF検定も1．808と1．383であり。そのp値から分散均一の帰無仮説は採択される。

このように診断検定（diagnostic test）の結果は、検定方法により異なることがある。その場合は少標本か大標本か、あるいは検定の前提が充たされているのかいないのか等を判断する必要があ

表4．4　Whiteテスト（交差項無し）

White Heteroskedasticity Test:

F-statistic	1.807652	Probability	0.103504
Obs*R-squared	10.51707	Probability	0.104499

Test Equation:
Dependent Variable: RESID^2
Method: Least Squares
Sample: 1123
Included observations: 123

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	−3785.381	8950.709	−0.422914	0.6731
DISPOSAL	13.62467	14.41488	0.945181	0.3465
DISPOSAL^2	−0.001006	0.005432	−0.185134	0.8534
MONEY	−1.341627	2.913466	−0.460492	0.6460
MONEY^2	0.000141	0.000319	0.441488	0.6597
NUMBER	7530.963	6085.777	1.237469	0.2184
NUMBER^2	−1132.264	852.1761	−1.328674	0.1866

R-squared	0.085505	Mean dependent var	13611.72
Adjusted R-squared	0.038203	S.D. dependent var	23717.02
S.E. of regression	23259.58	Akaike info criterion	23.00205
Sum squared resid	6.28E+10	Schwarz criterion	23.16209
Log likelihood	−1407.626	F-statistic	1.807652
Durbin-Watson stat	1.883457	Prob（F-statistic）	0.103504

表4.5　Whiteテスト（交差項あり）

White Heteroskedasticity Test:

F-statistic	1.383042	Probability	0.204002
Obs*R-squared	12.20454	Probability	0.202022

Test Equation:
Dependent Variable: RESID＾2
Method: Least Squares
Sample: 1123
Included observations: 123

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	−390.7961	9884.406	−0.039537	0.9685
DISPOSAL	9.447412	24.70322	0.382436	0.7029
DISPOSAL＾2	−0.004783	0.006707	−0.713235	0.4772
DISPOSAL*MONEY	0.000144	0.002030	0.071010	0.9435
DISPOSAL*NUMBER	3.792932	6.463257	0.586845	0.5585
MONEY	−2.668010	5.149485	−0.518112	0.6054
MONEY＾2	7.60E−05	0.000371	0.204793	0.8381
MONEY*NUMBER	0.527808	1.524829	0.346142	0.7299
NUMBER	6539.738	6246.438	1.046955	0.2974
NUMBER＾2	−1455.021	978.9823	−1.486258	0.1400

R-squared	0.099224	Mean dependent var	13611.72
Adjusted R-squared	0.027481	S.D. dependent var	23717.02
S.E. of regression	23388.87	Akaike info criterion	23.03571
Sum squared resid	6.18E+10	Schwarz criterion	23.26435
Log likelihood	−1406.696	F-statistic	1.383042
Durbin-Watson stat	1.868869	Prob（F-statistic）	0.204002

る。

4.5　分散不均一が存在するときの修正

Goldfeld-Quandtテスト、Breusch-Paganテスト、Whîtêテストで分散不均一であると判断されたとしよう、その時我々は２つの課題に留意する必要がある。一つはそれが必要な変数を落としたり関数形を誤ったことによる見せかけの分散不均一なのか、あるいはモデルの定式化が正しいにも関わらず起きている真の分散不均一なのかどうかを検討することである。

一つはモデルの定式化が正しいにもかかわらず起きた真の分散不均一であるとしたとき、それをどのように修正するかということである。

ここでは後者の問題を取り上げる。分散が不均一の場合でも、その推定量は一致性と不偏性は持っていた。有効性が無くなりt検定やF検定ができないということが問題であった。従ってこの修正が必要となる。

簡単化のために

$$y_i = a + bx_i + e_i \qquad 4.20)$$

を考える。分散が均一であれば以下のようであった。

$$V(\hat{b}) = \frac{\sigma^2}{\Sigma(x_i - \bar{x})^2} \qquad 4.21)$$

である。これに対し分散が不均一であれば以下のようである。

$$V(e_i) = \sigma^2_i = \sigma^2 z_i^2 \qquad 4.22)$$

4.22）式を4.21）式に代入すると以下のようである。

$$V(\hat{b})=\frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2\sigma_i^2}{(\Sigma(x_i-\bar{x})^2)^2}=\frac{\sigma^2\Sigma(x_i-\bar{x})^2 z_i^2}{(\Sigma(x_i-\bar{x})^2)^2} \quad 4.23)$$

4.23）式の右辺は明らかに4.21）式とは異なる（これは4.13）式の問題と同一である）。ただしここでσ_i^2は未知である。これに替えて観察可能な4.20）式の残差を用いるのがWhiteの修正で、分散不均一の時の一致性のある標準誤差（heteroskedasticity-consistent standard errors, HCSEs）といわれる[9]。この修正でt検定やF検定などの仮説の検定を行うことができる。

$$V(\hat{b})=\frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2\hat{e}_i^2}{(\Sigma(x_i-\bar{x})^2)^2} \quad 4.24)$$

ここで$\hat{e}_i$は4.20）式のOLS残差（$y_i-\hat{a}-\hat{b}x_i$）である。$\hat{V}(\hat{b})=seh(\hat{b})^2$とし、

$$t=\frac{\hat{b}-b}{seh(\hat{b})}$$

を利用し、t検定を行うことががができる。ただし、このt統計量が標準正規分布に従うことを証明するためには、標本数が十分多いことが必要である。このWhiteの修正をEviewsはオプションで次のように行うことができる。

equation eq4_1. LS（h） yearcons c disposal money number

（h）がHCSEsを求めるためのオプションである。参考までにその結果を表4. 6に掲げておく。なおWhiteの修正で変わるのは、各変数の係数推定量の標準誤差、t値とp値であり、係数の推定量は変わらないことを確かめられたい。

4.6　加重最小自乗法とデータの変換

集計されたデータについて、分散が不均一であるときその調整のための係数が与えられていることは希である。特に時系列データについては、未知であるケースが大半であろう。しかしその希な例外として、集計されたデータを用いかつその集計のウエイトが予め分かっていることがある。たとえば公表されている家計調査や全国消費実態調査では、グループ毎（都道府県単位や、年齢階層毎等）の平均の他に集計されたサンプル数、場合によっては母集団を考慮した調整係数が発表されている。このサンプル数や調整係数を用いて推計することができる。再び簡単な例を考える。

表4. 6　Whiteの一致性ある推計

Dependent Variable: YEARCONS
Method: Least Squares
Sample: 1 123
Included observations: 123
White Heteroskedasticity-Consistent Standard Errors & Covariance

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	179.2796	24.93516	7.189834	0.0000
DISPOSAL	0.123178	0.031507	3.909579	0.0002
MONEY	0.009182	0.005953	1.542428	0.1256
NUMBER	28.36190	6.430732	4.410369	0.0000

R-squared	0.385178	Mean dependent var	363.8049
Adjusted R-squared	0.369678	S.D. dependent var	149.4013
S.E. of regression	118.6139	Akaike info criterion	12.42160
Sum squared resid	1674242.	Schwarz criterion	12.51306
Log likelihood	−759.9287	F-statistic	24.85061
Durbin-Watson stat	1.887142	Prob（F-statistic）	0.000000

[9] 説明変数がk個の場合の特殊ケースとして4.24）式が導かれる。k個の場合もこの拡張で行われることが知られている。

$y_i = a + bx_i + e_i$ 4.25)

$V(e_i) = \sigma_i^2$

Eviewsはサンプル数や調整係数が既知であれば、それをw_iとし、以下の目的関数を最小化する。

$S = \Sigma w_i^2 (y_i - a - bx_i)^2 = \Sigma (w_i y_i - aw_i - bw_i x_i)^2$ 4.26)

w_iで加重されるので、加重最小自乗法（weighted least squares, WLS）という。4.26）式から明らかなように、推計されるパラメータは4.25）式のOLSの値とは異なったものになる。この点でWhiteのHCSEsがパラメータ自体は変化させずに分散（標準誤差）を修正するのとは異なる。

4.26）式を子細に検討すると4.26）式は

$w_i y_i = aw_i + bw_i x_i + w_i e_i$ 4.27)

という式のOLS目的関数になる。$V(w_i e_i)$がiに依存しなければ4.27）式をOLSで推定するとBLUEが得られる。

1994年の家計調査年報でWLSを行ってみよう。家計調査年報では勤労者世帯について都道府県庁所在地及び川崎市、北九州市の49市毎に、収入や消費支出の平均値と調整係数が報告されている。その調整係数、経常収入、消費支出を用いて消費関数を推計する。

このWLSをEviewsはオプションで次のように行うことができる。サンプル数やなどウエイトになる調整係数の名前を仮にcodeとする

$(consump_i{}^* code_i) = a^* code_i + b(income_i{}^* code_i) + e_i{}^* code_i$ 4.28)

を推計するコマンドは次の通りである。

equation eq4_1. LS(w=code) consump c income

w=codeのWがWLSを指示し、そのウエイトがcodeであることを示している（もちろん4.28）式にある変数を作成し、4.28）式をOLSコマンドで推計しても同一である）。

結果は表4. 7に掲げるとおりである（比較のために通常のOLS推計も併せて掲げる）。

Eviewsは加重された統計量（残差を4.26）式から得られる推定量（$\hat{a}$, $\hat{b}$）を用いたcode*consump-code*$\hat{a}$-$\hat{b}$*code*incomeで計算）と加重されない統計量（残差を4.26）式から得られる推定量を用いたconsump-$\hat{a}$-$\hat{b}$*incomeで計算）とを出す。

通常のOLSとWLSを比較すると、係数、t値、AdjR^2の全てが異なることが分かる。このことはグループ化されたデータにより分析するときは、調整係数やサンプル数を考慮しないと結果の解釈を誤るという一つの事例である[10]。

もう一つの特殊なケースは、分散不均一の要因である変数とその変数と誤差項の関係が既知であるケースである。これについては基準化の例を参考に挙げることができる。

4.12）式で本来Nで基準化されるべきモデルが基準化されていないとき、その分散がN_i^2に依存することを示した。これは逆に言えば、基準化すれば分散不均一の問題は解決することを意味している。これを再論してみよう。

$y_i = a + bx_i + e_i$ 4.25)

において、次式のようにe_iの分散が説明変数のx_iの平方根に比例するとしよう。

すなわち$V(e_i) = \sigma^2 x_i$。

$$V\left(\frac{e_i}{\sqrt{x_i}}\right) = \frac{1}{x_i} V(e_i) = \frac{1}{x_i} \sigma^2 x_i = \sigma^2 \qquad 4.29)$$

4.25）式の両辺を$\sqrt{x_i}$で徐し

$y_i/\sqrt{x_i} = a/\sqrt{x_i} + b\ (x_i/\sqrt{x_i}) + e_i/\sqrt{x_i}$ 4.30)

とする。このとき4.29）式より

[10] ちなみに表4.7. 2のOLS推計についてWhiteテストで分散不均一を検定しても、分散均一の帰無仮説は棄却されないことを読者は確かめられたい。従って一見不均一分散の問題は現れないように見えるかもしれない。しかしその差は表に掲げるとおりである。全国消費実態調査や家計調査などの多くのサーベイについては、その個票を直接用いずに集計された結果で分析するときは、この調整に常に配慮する必要がある。

表4.7.1　WLSの例

Dependent Variable: CONSUMP
Method: Least Squares
Sample: 149
Included observations: 49
Weighting series: CODE

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	114517.2	20400.45	5.613463	0.0000
INCOME	0.422708	0.037534	11.26191	0.0000

Weighted Statistics

R-squared	0.990925	Mean dependent var	347799.0
Adjusted R-squared	0.990732	S.D. dependent var	190013.0
S.E. of regression	18292.94	Akaike info criterion	22.50638
Sum squared resid	1.57E+10	Schwarz criterion	22.58360
Log likelihood	−549.4063	F-statistic	5131.938
Durbin-Watson stat	1.509550	Prob（F-statistic）	0.000000

Unweighted Statistics

R-squared	0.377764	Mean dependent var	354495.0
Adjusted R-squared	0.364525	S.D. dependent var	26991.45
S.E. of regression	21516.69	Sum squared resid	2.18E+10
Durbin-Watson stat	1.430634		

表4.7.2　調整係数を使わない場合

Dependent Variable: CONSUMP
Method: Least Squares
Sample（adjusted）: 149
Included observations: 49after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	177030.7	29628.80	5.974953	0.0000
DISPOSAL	0.315620	0.052437	6.019057	0.0000
R-squared	0.435293	Mean dependent var		354495.0
Adjusted R-squared	0.423278	S.D. dependent var		26991.45
S.E. of regression	20497.90	Akaike info criterion		22.73399
Sum squared resid	1.97E+10	Schwarz criterion		22.81121
Log likelihood	−554.9828	F-statistic		36.22905
Durbin-Watson stat	1.483108	Prob（F-statistic）		0.000000

$e_i/\sqrt{x_i} \sim (0,\ \sigma^2)$

となる。$y_i/\sqrt{x_i}=Y_i^*$、$1/\sqrt{x_i}=z_i$、$(x_i/\sqrt{x_i})=X_i^*$、$(e_i/\sqrt{x_i})=E_i^*$とおくと

$$Y_i^*=az_i+bX_i^*+E_i^* \qquad 4.31)$$

4.31）式は分散均一であるのでOLSで推定すればよいことになる。これは

$$w_i=1/\sqrt{x_i}=z_i$$

とし、4.25）をWLS法で推定することと同一である。

参考文献

分散不均一の問題は計量経済学のテキストでは例外なく取り上げられるが、

山本拓［1995］『計量経済学』新世社の８章

Kmenta, J［1997］*Elements of Econometrics*（2th edition）: University of Michigan PressのCh８－２ Hill, C W. Griffiths and G. Judge［1997］Undergraduate Econometrics: John Wiley & SonsのCh10が比較的分かりやすい。