シリーズ

応用計量経済学(5)

横浜市立大学商学部　松浦　克己
大阪大学国際公共政策研究科　Colin McKenzie

第５章　系列相関

１　系列相関とは何か

$y_t = a + b_1 x_{1t} + b_2 x_{2t} + \cdots + b_k x_{kt} + e_t$　　5.1)

のモデルを再び考えよう。このとき系列相関は無いという仮定

A.3　$E(e_t e_s) = Cov(e_t, e_s) = 0$　for　$t \neq s$

が満たされていない場合の問題を考えてみよう。すなわち

A.3′　$E(e_t e_s) \neq 0$　for　$t \neq s$　　5.2)

という状況である。このようにある時点(t)と他のある時点(s)の誤差項が相関を持つとき、系列相関（serial correlation, autocorrelation）があるという。そのようなモデルを系列相関のあるモデル（autocorrelated model）ということがある。

5.2）式のように系列相関はある時点の行為が他の時点の行為に影響することを意味している。それはどのような場合に起きるのであろうか。

企業が設備投資を行うとしたとする。経済理論では企業は各期（たとえば観察される四半期、あるいは年）毎に利潤を最大化するように設備投資や人員の調整を行うことが想定されている。しかし実際には資金調達のために投資はずれ込むこともある。あるいは最適な生産計画が固定資本の投入を増やし労働投入を減少させることであっても、解雇は容易には進めることはできない。このようなケースはしばしば観察されるであろう。そのようなときは、前の期(直近、あるいは数期前の期)の企業の行動が当期に影響しているであろう[1)]。

また政策のショックは当期だけではなく、時間のずれを持って影響することがある。たとえば通貨需要関数には金利が影響すると考えられるが、金利が変動しても家計や企業の通貨需要は調整コストのために、その影響は当期では吸収しきれずに、継続することがある[2)]。

もう一つの例は季節調整済みのデータを用いる場合である[3)]。たとえば次のような簡単な消費関数を考えよう。データは四半期データとする。

$C_t = a + bY_t + e_t$　　5.3)

C_t、Y_tは各期の実質消費と実質所得とする。e_t

---

1)　この例のもう一つの解釈は、5.1）式で重要な説明変数が欠けているということである。すなわち、その欠けた変数の効果が今期だけではなく、来期にも影響しているようなケースである。

2)　この例のように系列相関はもっぱら時系列データで問題となる。クロスセクションデータでは通常この問題は取り上げられない。というのは時系列データではデータの並べ方に意味がある。具体的には90、91、92、…、99年というように時間の順序で並べられる。これを90、93、91、89というような並べ方はしない。他方でクロスセクションデータでは、通常並べ方に本質的な意味はない。たとえば都道府県データを北から南へ並べようが、「あいうえお」順で並べようが意味は変わらないはずである。そうするとtとsの順番も並べ方によって異なることになる。ただしクロスセクションデータの特殊な例外として空間的相関（spatial correlation）と言われるものがあるが、ここでは取り上げない。

3)　季節調整はかなり複雑な処理を原データに行うので、そのために原データと季節調整済みデータの統計的性質はかなり異なるものになることに留意した方がよい。

は誤差項で古典的仮定を充たすものとする。季節調整済みデータを何らかのウエイト（w_t）を利用し次のように作成したとする。

$$C_t^s = w_1C_t + w_2C_{t-1} + w_3C_{t-2} + w_4C_{t-3} \qquad 5.4)$$

$$Y_t^s = w_1Y_t + w_2Y_{t-1} + w_3Y_{t-2} + w_4Y_{t-3} \qquad 5.5)$$

ただし、$w_1+w_2+w_3+w_4=1$の制約を仮定する。5.3）式に5.4)、5.5）式を代入し整理すると

$$\begin{aligned} C_t^s &= (w_1+w_2+w_3+w_4)a \\ &\quad + b(w_1Y_t + w_2Y_{t-1} + w_3Y_{t-2} + w_4Y_{t-3}) \\ &\quad + (w_1e_t + w_2e_{t-1} + w_3e_{t-2} + w_4e_{t-3}) \\ &= a + bY_t^s + u_t \end{aligned} \qquad 5.6)$$

$$u_t = w_1e_t + w_2e_{t-1} + w_3e_{t-2} + w_4e_{t-3} \qquad 5.7)$$

このとき

$E(u_tu_{t-1}) \neq 0$, $E(u_tu_{t-2}) \neq 0$,

$E(u_tu_{t-3}) \neq 0$, $E(u_tu_{t-s}) = 0$, $s > 3$

となる。

（見せかけの系列相関））

分散不均一の場合と同様、系列相関についても過小定式化の誤りや関数型の選択の誤りによる見せかけの系列相関（spurious serial correlation）の問題に注意する必要がある。

たとえば真のモデルが

$$y_t = a + b_1x_{1t} + b_2x_{2t} + e_t \qquad 5.8)$$

であったとする。過小定式化の誤りで

$$y_t = a + b_1x_{1t} + u_t \qquad 5.9)$$

を推計したとする。第４章でも説明したように5.9）式の誤差項は以下のようになる。

$$u_t = b_2x_{2t} + e_t$$

このときx_{2t}が系列相関を持っていれば、e_tに系列相関が無くともu_tは系列相関を持つことになる[4)]。

関数型を誤るとき（たとえば真のモデルが対数関数であるのにレベルで推計したとき）も系列相関を生じる場合がある。

2　系列相関と推定量

モデルの定式化に誤りがないにもかかわらず、真の系列相関があるとしよう。そのとき推定量がどのような性質となるかを見てみよう。説明変数に被説明変数のラグ（y_{t-1}、これをラグ付き内生変数、lagged value of the dependent variableという）を含まない次のケースを考えてみる。

$$y_t = a + bx_t + e_t$$

bのOLS推定量$\hat{b}$の期待値を$E(\hat{b})$とする。$E(e_t)=0$であるから

$$E(\hat{b}) = b + \frac{\Sigma(x_t - \bar{x})E(e_t)}{\Sigma(x_t - \bar{x})^2} \qquad 5.10)$$

となり、不偏性と一致性は保たれている。

分散は

$$V(\hat{b}) = E(b - \hat{b})^2 = \frac{E(\Sigma(x_t - \bar{x})e_t)^2}{(\Sigma(x_t - \bar{x})^2)^2}$$

$$= \frac{\sigma^2}{\Sigma(x_t - \bar{x})^2} + \frac{\Sigma\Sigma(x_t - \bar{x})(x_s - \bar{x})E(e_te_s)}{(\Sigma(x_t - \bar{x})^2)^2}$$

$$\neq \frac{\sigma^2}{\Sigma(x_t - x)^2} = V_0(\hat{b}) \qquad 5.11)$$

となる。ここで$V_0(\hat{b})$は系列相関のない場合の$\hat{b}$の真の分散である。$V_0(\hat{b})$を推定するために$V_0(\hat{b})$にあるσ^2に替えてOLSから得られる推定量s^2を利用したものを仮に$VE_0(\hat{b}) = se(\hat{b})^2$とする。しかし5.11）式から明らかなように$VE_0(\hat{b})$は真の分散の適切な推定量ではない。

従って系列相関が存在する場合（説明変数にラグ付き内生変数がない場合）には、分散不均一の場合と同様にそれを用いたt検定やF検定などもバイアスを持つことになる。また区間予測も行えないことになる。

系列相関だけではなく、分散不均一もある場合の$y_t = a + bx_t + e_t$の問題を考える（ここでもラグ付き内生変数は含まれないものとする）。分散は、

---

4)　過小定式化の場合、推定量が不偏性と一致性を持たないことは第３章で説明したとおりである。

$$V(\hat{b})=E(\hat{b}-b)^2=\frac{E(\Sigma(x_t-\bar{x})e_t)^2}{(\Sigma(x_t-\bar{x})^2)^2}$$

$$=\frac{\Sigma(x_t-\bar{x})^2E(e_t^2)+\Sigma\Sigma(x_t-\bar{x})(x_s-\bar{x})^2E(e_te_s)}{(\Sigma(x_t-x)^2)^2} \quad 5.12)$$

となり、$\hat{b}$はやはり有効推定量ではなくなる。

次にラグ付き内生変数を説明変数に含む場合を考えてみよう。

$$y_t=a+by_{t-1}+e_t \quad 5.13a)$$

$$E(\hat{b})=b+E\left[\frac{\Sigma(y_{t-1}-\bar{y}_{-1})e_t}{\Sigma(y_{t-1}-\bar{y}_{-1})^2}\right]\neq b \quad 5.13b)$$

ここで$\bar{y}_{-1}$はy_{t-1}の平均値とする。5.13b）より$\hat{b}$はbの不偏推定量ではないということがわかる[5)]。またbはやはり有効推定量ではなくなる。

これから

$$\mathrm{plim}\hat{b}=b+\frac{\mathrm{plim}(1/n\Sigma(y_{t-1}-\bar{y}_{-1})e_t)}{\mathrm{plim}(1/n\Sigma(y_{t-1}-\bar{y}_{-1})^2)} \quad 5.13c)$$

となる。推定量が一致性を持つかどうかは5.13b）式の右辺第２項の分子に依存する。このケースは後述するが、一致性は持たないことが知られている。したがってラグ付き内生変数を持つモデルが系列相関を有するときは、OLSを用いることはできない。

３　系列相関のパターン[6)]

１）ARモデル

系列相関としてよく想定されるのは

$$e_t=\rho e_{t-1}+u_t \quad 5.14)$$

という１階の自己回帰モデル（first order autoregressive model, AR(1)）である。なおここでu_tは通常の仮定を充たすものとする。またe_tは分散均一であるとする。

ρはe_tとe_{t-1}の相関を示す未知のパラメータである（$Cor(e_t, e_{t-1})=\rho$）。収束のために$-1<\rho<1$を想定する[7)]。$\rho>0$であれば正の系列相関（positive autocorrelation）を持ち、$\rho<0$であれば負の系列相関（negative autocorrelation）を持つという。

e_tの分散を考えると

$$V(e_t)=V(\rho e_{t-1}+u_t)$$
$$=\rho^2V(e_{t-1})+V(u_t)+2\rho Cov(e_{t-1}, u_t)$$

となる。

仮定により$Cov(e_{t-1}, u_t=0)$，$V(u_t)$は一定であるから、それをσ_u^2とする。

$$V(e_t)=\sigma_e^2=\rho^2\sigma_e^2+\sigma_u^2$$

となるので、結局

$$\sigma_e^2=\frac{\sigma_u^2}{1-\rho^2} \quad 5.15)$$

を得る。これから系列相関の程度が大きいほど推定された分散は過小評価されることになる。

また5.14）式はすべてのtに対して成り立つので

$$e_{t-1}=\rho e_{t-2}+u_{t-1}$$

となる。これを5.14）式に代入すると

$$e_t=\rho(\rho e_{t-2}+u_{t-1})+u_t=\rho^2e_{t-2}+u_t+\rho u_{t-1}$$

同様の代入計算を繰り返すと

$$e_t=\rho^ke_{t-k}+u_t+\rho u_{t-1}+\cdots+\rho^{k-1}u_{t-k+1}$$

となる。その結果から

$$Cov(e_t, e_{t-k})=\sigma_e^2\rho^k \quad 5.16)$$

$$Cov(e_t, e_{t-k})=\frac{Cov(e_t, e_{t-k})}{\sqrt{V(e_t)V(e_{t-k})}}=\frac{\sigma_e^2\rho^k}{\sqrt{\sigma_e^2\sigma_e^2}}=\rho^k \quad 5.17)$$

となるので、時間が経過するにつれ相関は弱くなる（AR(1)モデルであるから、ρは時間を通じて

5) 5.13a）式においてe_tが系列相関を持たない場合でも、OLS推定量は不偏性を持たない。

6) 系列相関のパターンとしては、本章で取り上げるAR、MA、ARMA以外にARCH等がある。しかし、別の見方をするとARCHは分散不均一性のパターンでもある。

7) $|\rho|>1$であれば、発散する。$|\rho|<1$を定常性の条件（atationarity condition）ということがある。$\rho=1$であればe_tは単位根（unit root）を持つという。この定常性と単位根の問題については章を改めて詳述する。

一定である)。

ここで次のような5.13a)式の問題を考えよう。便宜上$a=0$と仮定する。

$y_{t-1}=e_{t-1}+be_{t-2}+b^2e_{t-3}+\cdots+b^{k-1}e_{t-k}\cdots$

両辺にe_tを乗じ5.17)式を用いると

$$\mathrm{plim}(1/n\Sigma(y_{t-1}-\bar{y}_{-1})e_t)=\rho\sigma^2_e+b\rho^2\sigma^2_e$$

$$+\cdots+b^{k-1}\rho^k\sigma^2_e\cdots=\frac{\rho\sigma^2_e}{1-b\rho}\neq 0$$

となるので、5.13c)式は、$\mathrm{plim}(\hat{b})\neq b$である。従ってラグ付き内生変数を説明変数に持つモデルが系列相関を有するときは、そのOLS推定量は一致性を持たない場合がある。特に上記のケースのように説明変数と誤差項が相関する場合は、一致性を失うことになる。

季節調整を行わない時系列の原データを用いるとき、それが四半期データであれば前年同期(4四半期前)、月次データであれば12ヶ月前と相関すると考えるのは不思議ではない(たとえばボーナス期の消費は前年のボーナス期の消費と関連するだろう)。すなわち以下のような例である。

$$e_t=\rho e_{t-4}+u_t \qquad 5.18a)$$

$$e_t=\rho e_{t-12}+u_t \qquad 5.18b)$$

このように直近の期とは系列相関を持たないが、離れた期と相関を持つことがある。原データを利用して分析するときは、この点に留意する必要がある。

$V(u_t)=\sigma^2_u$とし、5.18a)式の場合

$E(e_t)=0$

$V(e_t)=\sigma^2_u/(1-\rho^2)$ for all t

$Cov(e_t,e_{t-s})=\sigma^2_e\rho^{s/4}/(1-\rho^2)$ (sが4の倍数の時)

$=0$ (otherwise)

5.18b)式の場合

$E(e_t)=0$

$V(e_t)=\sigma^2_u/(1-\rho^2)$ for all t

$Cov(e_t,e_{t-s})=\sigma^2_e\rho^{s/12}/(1-\rho^2)$ (sが12の倍数の時)

$=0$ (otherwise)

となる。

更に系列相関はAR(1)モデルのようにある特定の期とだけに存在するのみならず、多期間にわたり存在することがある、またその誤差項の相関の程度も期によって異なることがある。すなわち

$$e_t=\rho^1e_{t-1}+\rho^2e_{t-2}+\cdots+\rho_pe_{t-p}+u_t \qquad 5.19)$$

という場合である。これをp次のARモデル(AR(p)と表記する)という。

2)MAモデル

系列相関のもう一つのパターンは移動平均プロセス(MA, moving average process, moving average disturbance)といわれるものである。5.14)式に変えて

$$e_t=u_t+\theta u_{t-1} \qquad 5.20)$$

を想定するものである。ここでもu_tは標準的仮定を充たすものとする($V(u_t)=\sigma^2_u$)。1階の系列相関を想定するのでこれをMA(1)という。このときe_tについて以下の性質を得ることができる。

$E(e_t)=0$

$V(e_t)=\sigma^2_u(1+\theta^2)$

$Cov(e_t, e_{t-s})=\theta\sigma^2_u$ $s=1$ 5.21)

$=0$ $s>1$

$Cor(e_t, e_{t-s})=\dfrac{\theta}{1+\theta^2}$ $s=1$

$=0$ $s>1$

この5.21)式のうちの相関($Cor(e_t, e_{t-1})$をρとする)を書き換えると

$$\rho=\frac{\theta}{1+\theta^2} \qquad 5.22)$$

である。MA(1)の場合通常$|\theta|<1.0$と仮定する[8]。そうすると5.22)より$|\rho|<0.5$となる。

このMA(1)モデルを一般化すると

$$e_t=u_t+\theta_1u_{t-1}+\theta_2u_{t-2}+\cdots+\theta_qu_{t-q} \qquad 5.23)$$

となる。これをq次のMAモデル、MA(q) という。MA(2)であれば以下のようである。

$$e_t=u_t+\theta_1 u_{t-1}+\theta_2 u_{t-2}$$

$$V(e_t)=\sigma^2_u(1+\theta_1^2+\theta_2^2)$$

$$Cov(e_t,\ e_{t-1})=\sigma^2_u(\theta_1+\theta_1\theta_2)$$

$$Cov(e_t,\ e_{t-2})=\theta_2\sigma^2_u$$

$$Cov(e_t,\ e_{t-s})=0 \quad s>2$$

ここで$Cor(e_t,\ e_{t-i})=\rho_i$とする。

$$\rho_1=\theta_1\frac{(1+\theta_2)}{(1+\theta_1^2+\theta_2^2)} \qquad 5.24)$$

$$\rho_2=\frac{\theta_2}{(1+\theta_1^2+\theta_2^2)}$$

を得る。5.23) 式のケースでは5.24) 式の相関は、代入計算を繰り返すことにより、$\theta_0=1$とし、以下のようになる[9]。

$$\rho_k=\frac{\Sigma_{t=0}^{q-k}\theta_t\theta_{t+k}}{\Sigma_{t=0}^{q}\theta_t^2} \quad k=0,\ 1,\ \cdots,\ q \qquad 5.25)$$

3）ARMAモデル

ARモデルとMAモデルを結合させた自己移動平均モデル (autoregressive moving average, ARMA) が利用されることもある。

5.14) 式と5.20) 式を併せた

$$e_t=\rho e_{t-1}+u_t+\theta u_{t-1} \qquad 5.26)$$

である (AR、MAの次数が各々１であるので、ARMA(１, １) と表記する。p次とq次であればARMA(p, q) と表記する)。ここでもu_tは標準的仮定を充たすものとする。

データについてARMAでもAR部分で定常性、MA部分で反転可能性が満たされていることが求められる。データの定常性が満たされているとき、ARMA(１, １) の期待値は次式で与えられる。

$$E(e_t)=0$$

分散は以下のようである。

$$r_0=V(e_t)=E(e_t)^2=E(\rho e_{t-1}+u_t+\theta u_{t-1})^2$$

$$=\rho^2V(e_t)+2\rho\theta E(e_{t-1}u_{t-1})+\sigma^2_e+\theta^2\sigma^2_e$$

このとき、$E(e_{t-1}u_{t-1})=\sigma^2_e$、また仮定により$u_t$は$u_{t-1}$、$e_{t-1}$と相関を持たないので、結局

$$r_0=V(e_t)=\left(\frac{1+\theta^2+2\rho\theta}{1-\rho^2}\right)\sigma^2_e$$

となる。共分散は以下の通りである。

$$r_1=Cov(e_t, e_{t-1})=\left(\frac{(1+\rho\theta)(\rho+\theta)}{1-\rho^2}\right)$$

$$\sigma^2_e=\rho r_0+\theta\sigma^2_e$$

$$r_k=\rho r_{k-1} \qquad k\geqq 2$$

従って自己相関は次の通りである。

$$Cor(e_t, e_{t-1})=r_1/r_0=\frac{(1+\rho\theta)(\rho+\theta)}{1+\theta^2+2\rho\theta} \qquad 5.27)$$

$$Cor(e_t, e_{t-k})=\rho^{k-1}Cor(e_t, e_{t-1}) \qquad k\geqq 2$$

4）自己相関、偏自己相関

観察されるサンプル (y_1, …, y_n) について自己の標本共分散 (c_j) を標本分散 (c_0) で基準化したもの ($d_j=c_j/c_0$) を標本自己相関 (auto-correlation)、あるいは標本コレログラム (correlogram) という。c_0とc_jは下記のように定義する。

$$c_0=(1/n)\Sigma(y_t-\bar{y})^2$$

$$c_j=(1/n)\Sigma(y_t-\bar{y})(y_{t-j}-\bar{y})$$

系列相関が全くないという帰無仮説か正しければ

$$t=d_k/\sqrt{(1/n)}$$

は標準正規分布に従う。

サンプルの相関を計るもう一つの尺度は標本偏自己相関 (partial autocorrelation) である。$e_{t-1}=\rho e_{t-2}+u_{t-1}$を考えると、$e_{t-2}$は$e_{t-1}$を通じて$e_t$に

---

8) MAモデルはある条件を充たせばARモデルとして表現することができる。これはMAモデルの反転可能性の条件 (invertibility condition) と呼ばれている。MA(1)の場合 $|\theta|<1.0$は反転可能性の条件となる。

9) q次までの相関を考えているので、
$\rho_k=0 \quad k>q$である。

影響することが分かる。そのルート以外にe_{t-2}が直接にe_tに影響している可能性がある。一般的にいってk期離れたラグが途中の期（$_{K-1}$等）を通じた影響だけでなく、その固有の要因でe_tに影響することがある。これを標本偏自己相関という。これをϕ_{kk}と書くと次のような公式で与えられる。

$$\phi_{kk}=d_j \qquad k=1$$

$$=\frac{d_k-\Sigma_{j=1}^{k-1}\phi_{k-1,j}d_{k-j}}{1-\Sigma_{j=1}^{k-1}\phi_{k-1,j}d_j} \qquad k>1 \qquad 5.28)$$

ただし$\phi_{k,j}=\phi_{k-1,j}-\phi_{kk}\phi_{k-1,k,j}$、$j=1, 2, \cdots, k-1$。この検定はサンプルnが十分い多いものとして

$t=\phi_{kk}/\sqrt{(1/n)}$で行う。　5.29)

これは系列相関が疑われる場合のAR、MA、ARMAのいずれに該当するかを考察する上で便利な役割を果たす。AR(p）の場合、偏自己相関はラグpまではゼロではないが、ラグ$p+1$以降はゼロになる。しかし自己相関はずっとゼロではなく時間が経つにつれ小さくなる。それに対してMA(q）の場合自己相関はラグqまではゼロではないが、ラグ$q+1$以降はゼロになる。ただし偏自己相関はずっとゼロではないが、時間が経つにつれ小さくなる。ARMAモデルの場合偏自己相関と自己相関はゼロにならない。この性質は標本自己相関と標本偏自己相関に反映されるはずである。

標本自己相関が有意であり、かつ標本偏自己相関が有意でなければARモデルを選択する（又は多くの標本自己相関が有意であり、かつほとんどの標本偏自己相関が有意でなければARモデルを選択する）。逆に標本自己相関が非有意でかつ標本偏自己相関が有意であればMAモデルを選択する。（又はほとんどの標本自己相関が非有意でかつ多くの標本偏自己相関が有意であればMAモデルを選択する）。

さらに多くの標本自己相関と多くの標本偏自己相関が共に有意であれば、ARMAを選択する。しかし場合によってAR、MA、ARMAモデルの識別が非常に困難なケースがあることには留意しておく必要がある。

4　系列相関の検定

最初にラグ付き内生変数を含まないAR(1)の系列相関の検定について考えてみる（MAモデルについても基本的に同様である）。

1）Durbin-Watsonテスト（DW test）

１階の系列相関の検定に最もよく使われるのは、Durbin-Watsonテスト（DWテスト、その統計量をd、DWと書くことが多い）である。

$$y_t=a+bx_t+e_t \quad e_t=\rho e_{t-1}+u_t \qquad 5.30)$$

において、以下の仮説検定を考える。

H_0：$\rho=0$

H_0：$\rho\neq 0$

5.30）式の回帰モデルのOLS残差をe_tとし、Durbin-Watsonテストの統計量は以下で与えられる。

$$d=\frac{\Sigma_{t=2}^{n}(e_t-e_{t-1})^2}{\Sigma_{t=1}^{n}e_t^2} \qquad 5.31)$$

ここでdが$4\geqq d\geqq 0$という条件を充たすことを証明することができる。5.31）式の分子を書き換えると

$$\Sigma_{t=2}^{n}(e_t-e_{t-1})^2=\Sigma_{t=2}^{n}e_t^2+\Sigma_{t=2}^{n}e_{t-1}^2-2\Sigma_{t=2}^{n}e_te_{t-1}$$

である。相関係数のρは

$\hat{\rho}=\dfrac{\Sigma e_te_{t-1}}{\Sigma e_t^2}$であるから、nが十分大きいときは

$$d\simeq 2-\rho$$

と近似することができる。系列相関がないとき、すなわち

$\rho=0$であれば、$\rho\simeq 0$となるのでd　2となる。

正(負）の系列相関であれば$\rho>0$（$\rho<0$）となる。したがって、正(負）の系列相関が存在す

るときは$0<d<2$（$2<d<4$）となる（$-1<\rho<1$の定常性の条件を充たす必要がある）。

ただし、t値やF値と異なり、DWテストの臨界値は説明変数x_tに依存する。そのために一般的な分布表を作成することができない。そこでDurbin–Watsonは標本数とパラメータの数を利用した臨界値（d_T）の上限（d_u）と下限（d_l）を提示している（$d_l<d_T<d_u$）。それを利用することで1階の系列相関の有無を検定することができる。これを用いると正の系列相関の検定（すなわちH_0：$\rho=0$、H_1：$\rho>0$）は次のとおりである。

$d<d_l$　　H_0：$\rho=0$を棄却。
　　　　　H_1：$\rho>0$を採択。
$d_u<d$　　H_0：$\rho=0$を棄却できない。
$d_l<d<d_u$　　判断を下すことができない（inconclusive）

負の系列相関について（すなわちH_0：$\rho=0$、H_1：$\rho<0$）は次のとおりである。

$d>4-d_l$　　H_0：$\rho=0$を棄却。
　　　　　H_1：$\rho<0$を採択。
$d<4-d_u$　　H_0：$\rho=0$を棄却できない。
$4-d_u<d<4-d_l$　　判断を下すことができない（inconclusive）

系列相関の符号についての事前情報がない場合（すなわちH_0：$\rho=0$、H_1：$\rho\neq0$）検定は次のとおりである。

$d<d_l$　　H_0：$\rho=0$を棄却。
　　　　　H_1：$\rho\neq0$を採択。
$d_l<d<d_u$　　判断を下すことができない（inconclusive）
$d_u<d<4-d_u$　　H_0：$\rho=0$を棄却できない。
$4-d_u<d<4-d_l$　　判断を下すことができない（inconclusive）
$d>4-d_l$　　H_0：$\rho=0$を棄却。
　　　　　H_1：$\rho\neq0$を採択。

このようにDW統計量には、系列相関の有無について判断を下すことができない領域が存在する。またこの検定統計量が用いられるのは、ラグ付き内生変数を含まないこと[10)]、説明変数は非確率変数であること、モデルに定数項を含むことという制約がある。

これらの制約にも関わらず、DW統計量の実際上有用な点はモデルを推計したとき

$d\leqq R^2$

であれば、モデルの定式化に誤りがある（すなわち過小定式化などにより見せかけの系列相関がある）というシグナルになることである[11)]。

第1章から第4章で様々な推計結果を掲載したが、それらの表にあるDurbin–Watson statがDurbin–Watsonの統計量である。

2）Qテスト

系列相関の検定に使われるものにBox–PierceのQテストとLjung–Boxテストがある。これは高

---

10) ラグ付き内生変数を含む場合、DurbinはDurbin's h統計量を提示している。

$y_t=a+b_1x_t+b_2y_{t-1}+e_t$

$e_t=\rho_{t-1}+u_t$

のモデルにおいて

$h=(1-0.5d)\sqrt{n/(1-n\hat{V}(\hat{b}_2))}$が標準正規分布に従うことを利用するものである。ここでnはサンプル数$\hat{b}_2$はb_2のOLS推定量$\hat{V}(\hat{b}_2)$は$\hat{b}_2$の分散のOLS推定量、dはAR(1)を仮定するときのダービンワトソン統計量である。

なお、$1-n\hat{V}(\hat{b}_2)>0$の制約を充たしている必要がある。高次の系列相関があるときはDurbin's alternativeという統計量も提案されているが省略する。

11) 四半期データを用いたときの、$\hat{e}_t=\rho\hat{e}_{t-4}+\hat{u}_t$の検定がWallisによって示されている。これはDurbin–Watsonの応用で、帰無仮説H_0：$\rho=0$について

$d=\frac{\sum_{t=5}(\hat{e}-\hat{e}_{t-4})^2}{\sum_{t=1}\hat{e}_t^2}$の統計量を用いて検定する。

統計量の臨界値の上限と下限はKmenta［1997］に掲載されている。

次の系列相関やARMAプロセスの検定に用いられる（ただしラグ付き内生変数はモデルに含まれないもとする)。

その統計量Qは

$Q = n \Sigma_{j=1}^{p} r_j^2$ 5.32)

ただし $r_j = \dfrac{\Sigma_{t=j+1}^{n} e_t e_{t-j}}{\Sigma_{t=1}^{n} e_t^2}$

回帰モデルのOLS残差をe_tとする。

系列相関はないという帰無仮説の下で、Q統計量は自由度pのχ^2分布に従う。小標本の場合は5.32）式を以下のように修正して用いる。

$Q' = n(n+2)\Sigma_{j=1}^{p} r_j^2/(n-j)$ 5.33)

Q'はLjung-Boxテストと呼ばれている。5.33）式も系列相関はないという帰無仮説の下で自由度pのχ^2分布に従う。

なおQ統計量（又はQ'統計量）は次数の取り方に依存するので、本来高次の系列相関があるにも関わらず、それよりも低い次数で、検定した場合結果を誤ることがあることに留意する必要がある。逆に本来低次の系列相関があるにも関わらず、それよりも高い次数で検定した場合でも同じように結果を誤ることもある。

３）LM検定

ラグ付き内生変数をモデルに含む場合や、高次の系列相関を含む場合やARMA等に関するより一般的な検定方法が、Breusch-Godfreyのラグランジュ乗数テスト（LM）によって示されている。

$y_t = a + bx_t + e_t$ 5.34a)

$e_t = \rho_1 e_{t-1} + \rho_2 e_{t-2} + \cdots + \rho_p e_{t-p} + u_t$ 5.34b)

ただしu_tは標準的仮定を充たすものとする。このケースをを考えよう。系列相関がないという帰無仮説は

H_0：$\rho_1 = \rho_2 = \cdots \rho_p = 0$

である。5.34b）式にあるe_tが観測可能であれば5.34b）式をOLSで推定し、H_0をF検定で検定すれば良い。しかしe_tが観測可能ではないので推定する必要がある。

そのために5.34a）式をOLSで推計し、その残差e_tを求める。その上で

$e_t = a' + b'x_t + \rho_1 e_{t-1} + \rho_2 e_{t-2} + \cdots + \rho_p e_{t-p} + v_t$ 5.35a)

$v_t = u_t + \rho_1(e_{t-1} - e_{t-1}) + \rho_2(e_{t-2} - e_{t-2}) + \cdots$
$+ \rho_p(e_{t-p} - e_{-p})$ 5.35b)

の補助回帰を行う。5.35a）式の決定係数をR^2、サンプル数をnとする。帰無仮説の下でnが十分大きいとき、nR^2が自由度pのχ^2分布に従う。

もう一つの検定はF検定を利用することである。帰無仮説が正しいと$v_t = u_t$となるので、5.35a）式の誤差項は標準的線形回帰モデルの仮定を充たす。5.35a）式から得られる残差平方和を制約のないモデルの残差平方和RSS_uとする。

$\rho_1 = \rho_2 = \cdots \rho_p = 0$の制約をつけたモデル

$e_t = a' + b'x_t + u_t$ 5.36)

の残差平方和をRSS_rとする。F統計量は

$F = \dfrac{(RSS_r - RSS_u)/p}{RSS_u/(n-2-p)}$ 5.37)

である（これは除外変数テストの一例である)。このとき除かれた残差は非確率説明変数ではないので、小標本ではF分布の正確な性質を知ることができない。しかし大標本のケースではF分布に従う。

$RSS_u/(n-k-p)$はu_tの分散推定量で、nが十分大きいときRSS_r/nで置き換えることができる。F統計量として5.37）式に代えて

$F' = \dfrac{(RSS_r - RSS_u)/p}{RSS_r/n}$ 5.38)

を用いる。OLSの正規方程式より、x_tはe_tを説明することはないので、5.36）式の総平方和はRSS_rとなる。このとき

$F' = nR^2/p$が知られている。これを書き換えて

$pF' = nR^2$ 5.39)

となる。これを自由度pのχ^2検定すればよい。

5　系列相関がある場合の推定

系列相関がある場合の問題を見てみよう。系列相関はあるが、ラグ付き内生変数や確率変数を含まず、説明変数と誤差項に相関はないケースがまず考えられる。このとき前述の通りOLSの推定量は一致性は持つが有効性は持たない。t検定やF検定を行うことができない。したがってこのケースでは、一致性は持つので分散（標準誤差）の修正が問題となる。

もう一つはARモデルやMAモデルなどの推定方法である。

もう一つはラグ付き内生変数などを含むためにOLS推定量が一致性も持たない場合である。この場合は操作変数法（Instrumental Variables Method, IV）や二段階最小自乗法（Two-Stage Least Squares, 2SLS）によることになる。IVや２SLSについては章を改めて紹介する。

１）Newey-Westの一致性のある推定

誤差項に系列相関がある場合、あるいは分散不均一が存在する場合、もしくは系列相関と分散不均一が共に存在する場合、その分散の推定量をNewey－Westは提案した。これは係数についてはOLSの推定量を用いるが、その推定量の真の分散（たとえば5.11）式や5.12）式）を推定し、仮説検定を行うものである。

ここでも

$y_t = a + bx_t + e_t$

を考える。Newey－Westの修正は以下による。

$$Q = \Sigma\, \hat{e}_t^{\,2}(x_t - \bar{x})(x_t - \bar{x}) + \Sigma_{q=1}^{L} w_q \Sigma_{t=q+1}^{n} \hat{e}_t \hat{e}_{t-q}$$
$$\times((x_t - \bar{x})(x_{t-q} - \bar{x}) + (x_{t-q} - \bar{x})(x_t - \bar{x})) \qquad 5.40)$$

ここで、

$w_q = 1 - q/(L+1)$　$R = \Sigma(x_t - \bar{x})(x_t - \bar{x})$。

5.12）式の分散を$VE(\hat{b}) = sewe(\hat{b})^2 = Q/R^2$として推定する。t検定は

$\dfrac{\hat{b} - b}{sewe(\hat{b})}$が標準正規分布に従うことを利用して行う。

なおL＝０であれば、第４章で見た分散不均一に関するWhiteの一致性のある推定量と同一となる[12)13)]。Newey－Westの方法はWhiteの推定方法のより一般的なものといえる。

２）ARモデルの推定

系列相関のある場合の推定方法について、最も簡単なAR(1)モデルについてみてみよう（高次の系列相関のある場合もこの延長である）。

$$y_t = a + bx_t + e_t \qquad 5.41)$$

$$e_t = \rho e_{t-1} + u_t \qquad 5.42)$$

となる。t≧２のケースについては5.41）式に5.42）式を代入し整理すると

$y_t - \rho y_{t-1} = (1-\rho)a + b(x_t - \rho x_{t-1}) + u_t$

を得る。ここで

$y_t^* = y_t - \rho y_{t-1}$、$a^* = (1-\rho)a$、$x_t^* = x_t - \rho x_{t-1}$

とおくと、

$$y_t^* = a^* + bx_t^* + u_t \qquad 5.43)$$

となる。仮定によりu_tは互いに相関しないので、$u_t \sim N(0, \sigma_u^2)$である。

5.43）式による推計は一般化最小自乗法（generalized least squares, GLS）の一つの例である[14)15)]。

12)　Newey-Westの一致性のある推定についてはDavidson and MacKinnon［1993］, Greene［1997］参照。

13)　EviewsはLを
　　$L = floor(4(n/100)^{2/9})$として自動的に選択する。
　　Qを計算するためにEViewsは先に定義したw_qを利用するが、別の計算ソフトの場合w_qの選択は違う形で行われている。

ρが既知の場合はその値を用いてy_t^*、x_t^*を計算できるが、ρが未知の場合はρとa、bを同時に推定する。

もう一つ用いられるのは最尤法である。e_t、u_tが正規分布に従うとする。

$$\mathrm{LogL}=0.5\mathrm{Log}(1-\rho^2)-0.5n\log(2\pi\sigma_u^2)-\Sigma u_t^2/2\sigma_u^2 \quad 5.44)$$

を最大化する。ここで

$$u_t=y_t-\rho y_{t-1}-(1-\rho)a-b(x_t-\rho x_{t-1}) \quad t>1$$

$$u_1=y_1-a-bx_1$$

となる。このときパラメータa、bとρは同時に推定される。

四半期データの場合5.42）式の代わりに

$$e_t=\rho e_{t-4}+u_t$$

を使用することがある。最尤法で推定すると対数尤度関数は

$$\mathrm{LogL}=0.5\mathrm{Log}(1-\rho^2)^4-0.5n\log(2\pi\sigma_u^2)-\Sigma u_t^2/2\sigma_u^2 \quad 5.45)$$

ここで

$$u_t=y_t-\rho y_{t-4}-(1-\rho)a-b(x_t-\rho x_{t-4}) \quad t>4$$

$$u_t=y_t-a-bx_t \quad t=1,\ 2,\ 3,\ 4$$

となる。

3）MAモデル、ARMAモデルの推定

MAモデル、ARMAモデルの推定は必ずしも容易ではない。MAモデルの対数尤度は次の通りである[16)]。

$$y_t=a+bx_t+e_t$$

$$e_t=u_t+\theta u_{t-1}$$

において

$$\mathrm{LogL}=-(n/2)\mathrm{Log}(\sigma^2)+1/2\,\mathrm{Log}\,|w|-(1/2\sigma^2)\Sigma_{t=1}^{n}u_t^2 \quad 5.46)$$

ただしw^2は$\sigma^2 e_t$の分散共分散行列である。このとき

$$\mathrm{Log}\,|w|=\mathrm{Log}[(1-\theta^{2n+2})/(1-\theta^2)]$$

であることが知られている。u_tを計算するために$u_0=0$とし、

$$u_1=y_1-a-bx_1$$

$$u_2=y_2-a-bx_2-\theta u_1$$

$$\vdots$$

$$u_n=y_n-a-bx_n-\theta u_{n-1}$$

となる。y_t^*、x_t^*とz_t^*を次のように定義すると

$$y_0^*=0、y_t^*=y_t-\theta y_{t-1}^* \quad t>0$$

$$x_0^*=0、x_t^*=x_t-\theta x_{t-1}^* \quad t>0$$

$$z_0^*=0、z_t^*=1-\theta z_{t-1}^* \quad t>0$$

u_tは$u_t=y_t^*-az_t^*-bx_t^*$となる。

実際の推定に当たっては、5.46）式を推計することは困難なので、5.46）の第２項を無視して

$$\mathrm{LogL}=-(n/2)\mathrm{Log}(\sigma^2)-(1/2\sigma^2)\Sigma_{t=1}^{n}u_t^2 \quad 5.47)$$

---

14) $t=1$のケースでは、5.41）式の両辺に$\sqrt{1-\rho^2}$を乗じると、

$$y_1\sqrt{1-\rho^2}=a\sqrt{1-\rho^2}+bx_1\sqrt{1-\rho^2}+e_1\sqrt{1-\rho^2}$$

を得る。ここで、

$$y_1^*=y_1\sqrt{1-\rho^2} \quad a^*=a\sqrt{1-\rho^2}$$

$$x_1^*=x_1\sqrt{1-\rho^2} \quad e_1^*=e_1\sqrt{1-\rho^2}$$

とおくと、

$$y_1^*=a^*+bx_1^*+e_1^*$$

となる。このとき

$$E[e_1^*]=E[e_1]\sqrt{1-\rho^2}=0$$

$$V[e_1^*]=(1-\rho^2)V[e_1]=(1-\rho^2)\frac{\sigma_e^2}{(1-\rho^2)}$$

$t\geqq 2$のケースのみを推計するのはCochrane-Orcutt法と言われる。

15) 5.43）式を次のように考える。

$$Y_t=(1-\rho)a+b_1x_t-\rho bx_{t-1}+\rho y_{t-1}+u_t=a'+b_1'x_t+b_2'x_{t-1}+b_3'y_{t-1}+u_t$$

このとき、$b_2'+b_1'b_3'=0$の制約（common factor restriction）がかかっている。この非線形制約が成立しているかどうかを、Wald検定で確かめることが望ましい。

16) 詳しくは山本拓［1988］の第４章３、４節、Davidson and MacKinnon［1993］のCh10-７を参照。

を用いる。

なお5.46）式はMA(q）とARMAモデルにも適用される。

ARとMAの次数については、十分高い次数から選択し順次非有意な次数を除いてゆけばよいというのが一つの選び方である。ARMAの次数の選択（又はARとMAの次数の選択）についてはAICやSICの情報量基準を用いることも行われる（AICとSICについて第３章を参照されたい)。

6　Eviewsによる推定

輸入関数を例として、系列相関の問題を考えることにしたい。季節調整を行っていない月次の輸入数量指数（IMPNUMBERと表記する）を被説明変数としよう。輸入に影響するものとして国内生産を考える（具体的にはその代理変数として鉱工業生産指数IIPを考える)。国内生産が高まれば輸入需要は増加するので、その符号は正が期待される。為替レートとしては実効為替レートを取り上げる（JILTUKOU)。円高になれば実効為替レートは高くなり、輸入は増えると考えられるので、その符号は正が期待される。ただしJカーブ効果が働いているようであれば負が期待される。価格効果として輸入物価指数/国内卸売物価指数（SOUTAI）を考える。相対価格が上昇すれば輸入品の競争力が落ちるので、この符号は負が期待される（推計期間は93年１月から98年３月までである)。

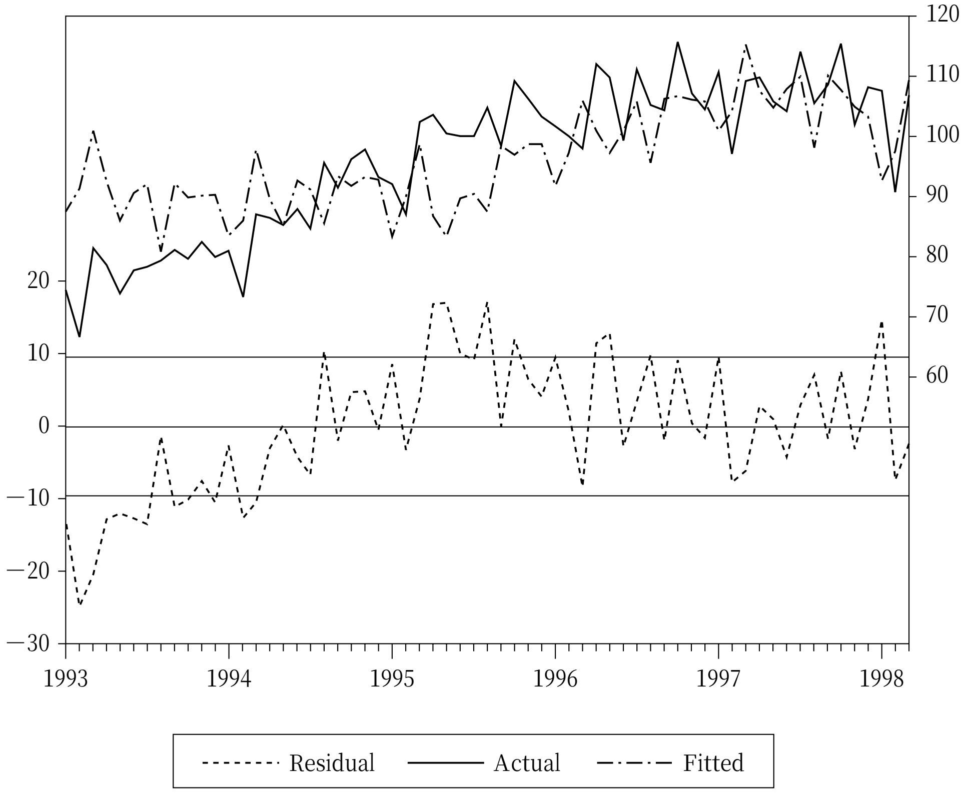
$$IMPNUMBER_t = a + b_1 IIP_t + b_2 JILTUKOU_t + b_3 SOUTAI_t + e_t$$

をOLSで推計するEviewsのプログラムは次の通りである（方程式の名前をeq5_1としている)。

equation eq5_1. ls IMPNUMBER C IIP JILTUKOU SOUTAI

結果は次のようであった。

図5.１　残差のグラフ（系列相関）



$$IMPNUMBER_t = \underset{(1.30)}{120.13} + \underset{(4.00)}{0.81}IIP_t - \underset{(-1.64)}{0.57}JILTUKOU_t - \underset{(-0.63)}{29.51}SOUTAI_t + e_t$$

5.48）

$AdjR^2 = 0.408$（$R^2 = 0.436$）　SER＝9.57

DW＝0.941　期間：93年１月－98年３月

なおカッコ内はt値である。

（時系列データを用いた分析ではDW統計量を報告するのが通例である）

定数項以外の説明変数が３個、サンプルは63個である。このケースでd_lは約1.49、duは約1.69である（５％有意水準）。この例では非常に強い正の系列相関がある。残差をプロットすると明らかに正の系列相関がうかがわれる（図5.１参照）。

月次データであるので、比較的長い16次までのラグをとってQテストを行ってみよう。Qテストは

View/Residual Tests/Correlogram-Q-Statistics を選択し、**Lag Specification**のダイアログにラグの次数（この場合16）を入れる。結果は表5.１に示すとおりである。Q統計量は極めて高く、p値は0.000であり系列相関はないという帰無仮説は強く棄却されている。なお、表に示されるAutocorrelation（AC）Partial Correlation（PAC）の点線は$\pm 2/\sqrt{n}$で計算された２*標準誤差におおむね対応し、約５％の有意水準を示す。この点線の範囲内であれば系列相関はないという帰無仮説は棄却されない。

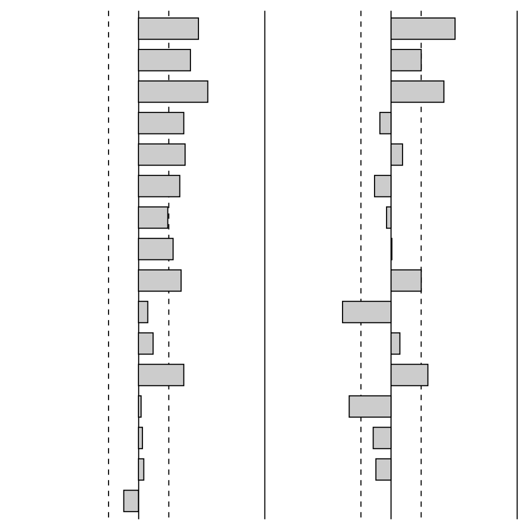
ACは９期までの各ラグと12期とも有意に０とは乖離している。PACは１～３期、９、10、12、13期で有意に０から乖離している。これからかなり複雑な系列相関（例えばARMA）のパターンがうかがわれる。

このような複雑なARMA構造は、経済データでは希である。モデルの定式化に誤りがあり、見せかけの系列相関の疑いがある。そこで説明変数に在庫率（ZAIKORI）を加えた推計を試みた。結果は次の通りである。

表5.１　Qテストとコレログラム

Sample : 1993:01 1998:03
Included observations : 63

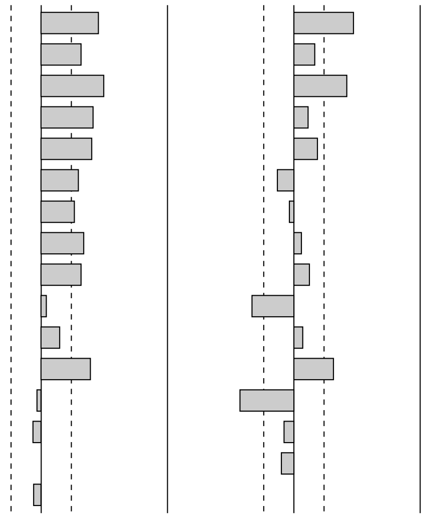
Autocorrelation　Partial Correlation



	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.514	0.514	17.419	0.000
2	0.445	0.246	30.711	0.000
3	0.598	0.432	55.095	0.000
4	0.388	−0.065	65.551	0.000
5	0.395	0.104	76.582	0.000
6	0.351	−0.113	85.421	0.000
7	0.258	−0.012	90.293	0.000
8	0.289	0.012	96.528	0.000
9	0.361	0.249	106.43	0.000
10	0.078	−0.379	106.91	0.000
11	0.128	0.069	108.20	0.000
12	0.384	0.308	120.02	0.000
13	0.009	−0.327	120.02	0.000
14	0.017	−0.131	120.05	0.000
15	0.065	−0.114	120.41	0.000
16	−0.095	0.010	121.19	0.000

表5.2　Qテストとコレログラム

Sample : 1993:01 1998:03
Included observations : 63



Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.475	0.475	14.875	0.000
		2	0.347	0.157	22.962	0.000
		3	0.526	0.413	41.837	0.000
		4	0.433	0.102	54.858	0.000
		5	0.411	0.175	66.802	0.000
		6	0.300	−0.136	73.281	0.000
		7	0.263	−0.029	78.342	0.000
		8	0.344	0.052	87.139	0.000
		9	0.331	0.120	95.454	0.000
		10	0.041	−0.352	95.582	0.000
		11	0.135	0.065	97.019	0.000
		12	0.401	0.316	109.91	0.000
		13	−0.020	−0.439	109.94	0.000
		14	−0.061	−0.092	110.25	0.000
		15	0.007	−0.109	110.26	0.000
		16	−0.056	0.003	110.53	0.000

$$\underset{(0.26)}{IMPNUMBER_t = 26.54} + \underset{(3.93)}{1.492 IIP_t} + \underset{(2.10)}{0.46 ZAIKORI_t}$$

$$- \underset{(-1.64)}{0.55 JILTUKOU_t} - \underset{(-1.16)}{54.32 SOUTAI_t} + e_t \qquad 5.49)$$

$AdjR^2 = 0.440$（$R^2 = 0.476$）　$SER = 9.30$

$DW = 1.015$　期間：93年１月−98年３月

Q統計量は表5.２に掲げるとおりである。在庫率を説明変数に加えても、なお複雑な系列相関構造となっている。

次にLM検定を行ってみる。LM検定は

View/Residual Tests/Serial Correlation LM Test

を選択し、やはり**Lag Specification**のダイアログにラグの次数を入れる。ラグの次数を16と選んだ結果は表5.３に示すとおりである。Obs*R-squaredがLM統計量である。45.57でp値は0.000113であるから、系列相関はないという帰無仮説はここでも棄却されている（なおF統計量も報告されているが、ラグの係数が全て０であるという制約を検定するものであり、厳密な分布に従うものではない。比較のために計算されているだけであるから、論文で報告する必要はない）。

さらに説明変数として円ドルレート（YEN-DOLL）を加えてみる。実効為替レートを説明変数に含むので、円ドルレートを更に加える必要は無いとも考えられる。円高になればYENDOLLの値が小さくなるので、係数の符号は負が期待される。しかし各国の企業が市場に応じて価格設定を変えている（pricing to market）ならばドル建ての輸入とドル以外の通貨による輸入で異なる効果を持つことも考えられる[17)]。

$$IMPNUMBER_t = a + b_1 IIP_t + b_2 ZAIKORI_t$$
$$+ b_3 JILTUKOU_t + b_4 YENDOLL_t + b_5 SOUTAI_t + e_t$$

を推計するコマンドは次の通りである。

equation eq5_3. ls IMPNUMBER C IIP

17) 厳密にはドルを除いた為替レートを考える必要があるが、ここでは便宜ドルを含む実効為替レートを取り上げる。

表5.3　LMテスト１

Breusch−Godfrey Serial Correlation LM Test:

F−statistic	6.864465	Probability	0.000000
Obs*R−squared	45.57278	Probability	0.000113

Test Equation:
Dependent Variable: RESID
Method: Least Squares

Variable	Coefficient	Std. Error	t−Statistic	Prob.
C	25.37313	68.55211	0.370129	0.7131
IIP	−0.154240	0.335606	−0.459587	0.6482
ZAIKORI	−0.187103	0.192338	−0.972781	0.3362
JILTUKOU	0.080615	0.257713	0.312809	0.7560
SOUTAI	1.113449	33.59742	0.033141	0.9737
RESID（−１）	0.479485	0.151313	3.168833	0.0029
RESID（−２）	0.101747	0.176104	0.577765	0.5665
RESID（−３）	0.232093	0.174112	1.333007	0.1897
RESID（−４）	−0.037005	0.161853	−0.228636	0.8203
RESID（−５）	0.172646	0.132575	1.302254	0.1999
RESID（−６）	−0.116294	0.135462	−0.858496	0.3955
RESID（−７）	−0.030372	0.136561	−0.222409	0.8251
RESID（−８）	0.088913	0.137855	0.644971	0.5225
RESID（−９）	0.149766	0.141507	1.058365	0.2959
RESID（−10）	−0.244763	0.136903	−1.787860	0.0810
RESID（−11）	−0.099662	0.171198	−0.582147	0.5636
RESID（−12）	0.660058	0.144764	4.559560	0.0000
RESID（−13）	−0.477808	0.177283	−2.695168	0.0101
RESID（−14）	0.020988	0.189440	0.110787	0.9123
RESID（−15）	−0.013273	0.191109	−0.069450	0.9450
RESID（−16）	0.057236	0.179298	0.319223	0.7511

R−squared	0.723377	Mean dependent var	−2.87E−14
Adjusted R−squared	0.591652	S.D. dependent var	8.997798
S.E. of regression	5.749780	Akaike info criterion	6.597402
Sum squared resid	1388.519	Schwarz criterion	7.311780
Log likelihood	−186.8182	F−statistic	5.491572
Durbin−Watson stat	1.987987	Prob（F−statistic）	0.000002

ZAIKORI JILTUKOU YENDOLL SOUTAI

結果は次のようであった。

$$\underset{}{IMPNUMBER_t} = \underset{(1.16)}{92.05} + \underset{(4.62)}{1.38}IIP_t + \underset{(3.36)}{0.58}ZAIKORI_t$$

$$-\underset{(-3.25)}{0.87}JILTUKOU_t - \underset{(-6.11)}{0.98}YENDOLL_t + \underset{(0.47)}{18.11}SOUTAI_t + e_t$$

5.50)

AdjR^2＝0.656（R^2＝0.684）　SER＝7.29　DW＝1.604　LM＝38.22　期 間：93年１月−98年３月

（LMはラグの次数を16と選んだLM検定の統計量である。LM検定を行った場合はその統計量も報告するのが通例である。特にDWテストが判断不能領域にあるときは、この検定量を報告することが望ましい。）

このときDW統計量のd_lは約1.43，d_uは約1.767である。1.43＜DW＝1.604＜1.767

であるから、Durbin−Watson統計の判断不能領

域となり、系列相関があるとも無いとも決定を下せない。そこでQテストとLMテストを試みる。結果は表5．4、5．5に掲げるとおりであるACから12次のAR項、PACから12次のMA項で系列相関があることがうかがわれる（Durbin-Watsonテストは１次の系列相関を検定するもので、このような高次の系列相関を検定するものではなかったことを思い出してほしい)。

LM検定は38．22でありp値は0．0014であるから系列相関はないという帰無仮説は強く棄却されている。

なおここでWald検定の例を示しておくことにする。輸入に与える実効為替レートと円ドルレートの効果は正反対であるならば、実効為替レートと円ドルレートの係数は同一であろう[18]。すなわち

$b_3=b_4$、あるいは$b_3-b_4=0$

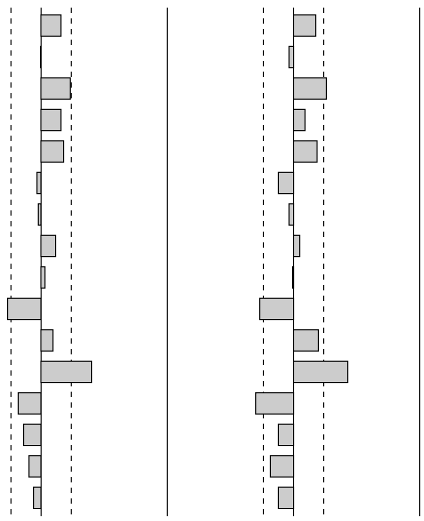
の制約が成立しているはずである。これをEviewsで行ってみよう。

View/Coefficient Tests/Wald-Coefficient Re-

表5．4　Qテストとコレログラム

Sample : 1993:01 1998:03
Included observations : 63

Autocorrelation　Partial Correlation



	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.163	0.163	1.7551	0.185
2	0.000	−0.028	1.7551	0.416
3	0.227	0.238	5.2803	0.152
4	0.161	0.090	7.0759	0.132
5	0.176	0.166	9.2631	0.099
6	−0.023	−0.126	9.3025	0.157
7	−0.016	−0.035	9.3220	0.230
8	0.117	0.030	10.347	0.242
9	0.026	−0.005	10.396	0.319
10	−0.256	−0.283	15.444	0.117
11	0.080	0.193	15.949	0.143
12	0.416	0.427	29.821	0.003
13	−0.174	−0.308	32.295	0.002
14	−0.144	−0.124	34.020	0.002
15	−0.097	−0.193	34.830	0.003
16	−0.072	−0.119	35.279	0.004

表5．5　LMテスト２

Breusch-Godfrey Serial Correlation LM Test:

F-statistic	3．953553	Probability	0．000191
Obs*R-squared	38．22465	Probability	0．001406

Test Equation:
Dependent Variable: RESID
Method: Least Squares
（一部OUTPIUTを省略）

18)　この二つの変数の定義より円高になると円ドルレートは小さくなるが、実効為替レートは円高では大きくなる。効果が同じという意味は円高のような変化の効果が同じということなので、制約は$b_3=-b_4$となる。

strictions

を選択する。ダイアログに制約式

c(4)−c(5)＝0

を書き入れる（Eviewsは説明変数の順番をc(1)、c(2)、c(3)…として認識する。この例ではJILTUKOUは説明変数の４番目、YENDOLLは説明変数の５番目である）。結果は図5．2に示すとおりである。EviewsではF統計量とχ^2統計量が示される（この例では制約が１個であるから両者は同一である）。統計量は0.135、p値は0.713であるから帰無仮説は棄却されない。

円ドルレートと実効為替の効果が同一ならば、$b_3=-b_4$、あるいは$b_3+b_4=0$の制約が成立している。これはEviewsでは次のようにWald検定で行うことがきる（表5．６）。

c(4)＋c(5)＝0

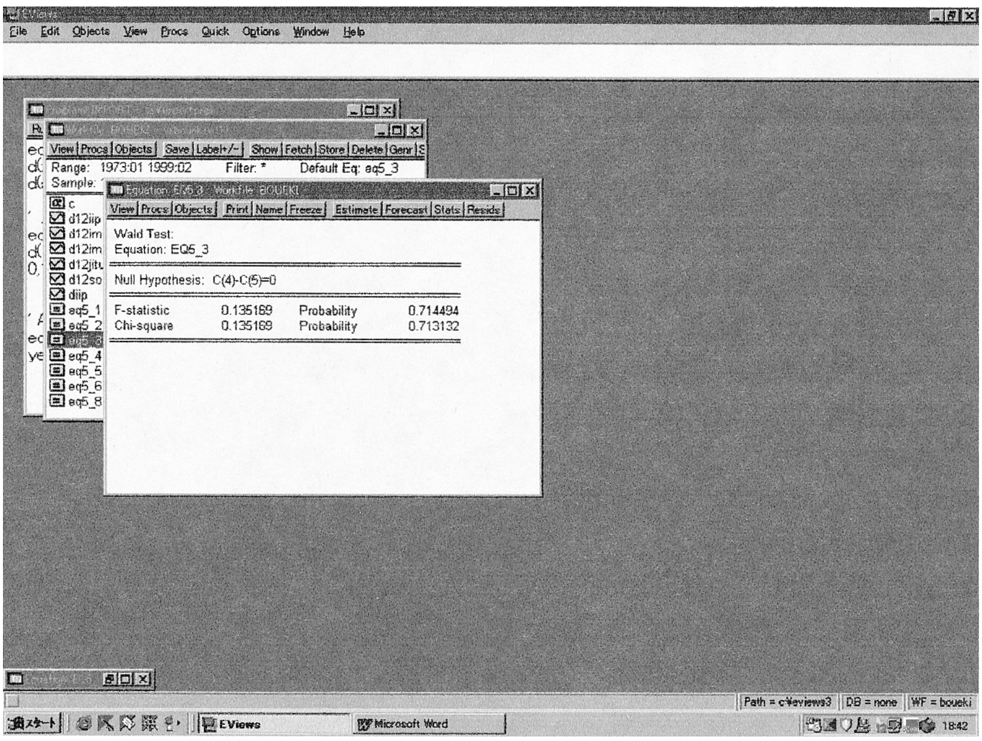
統計量は29.91、p値は0.000であるから、$b_3+b_4=0$の帰無仮説は強く棄却されている。

このことから我が国の輸入市場は、ドル建てについてみると円安（ドル高、YENDOLLの値が大きくなる）では速やかな輸入の減少をもたらしているが、実効為替レートでみると円高（バスケットの通貨安、JILUKOUの値が大きくなる）も速やかな輸入の減少をもたらし、その効果が異なることが分かる。なお上記のWald検定を行うに際し、系列相関がないという前提が暗黙の裡におかれている。

5.48）、5.49）と5.50）の各式の推定結果から分かるように、重要な説明変数を落とすことによって強いかつ複雑な系列相関が生じる場合がある。ただしここでは5.50）式で見られる系列相関を真の系列相関として議論を進める[19]。

次に系列相関のあることがLM検定で確かめられたので、Newey-Westの一致性のある推定の例

図5．2　WALDテスト



19)　5.50）式によると円高の効果は今期だけに生じると仮定する。この効果が完全に生じるまで時間がかかるのであれば5.50）式の特定化が間違っている。この問題について章を改めて詳述する。

表5.6　Waldテスト

Wald Test:
Equationt: EQ5_3

Null Hypothesis: C(4)＋C(5)＝0			
F-statistic	29.90863	Probability	0.000001
Chi-square	29.90863	Probability	0.000000

表5.7　Newey-Westの一致性のある推計

Dependent Variable: IMPNUMBER
Method: Least Squares
Sample（adjusted）: 1993: 011998: 03
Included observations: 63after adjusting endpoints
Newey-West HAC Standard Errors & Covariance（lag truncation＝3）

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	92.04623	104.0232	0.884863	0.3799
IIP	1.375849	0.345929	3.977254	0.0002
ZAIKORI	0.576975	0.175536	3.286932	0.0017
JILTUKOU	−0.873089	0.347340	−2.513644	0.0148
YENDOLL	−0.977469	0.199609	−4.896911	0.0000
SOUTAI	18.10679	41.07153	0.440860	0.6610

R-squared	0.683691	Mean dependent var	96.28730
Adjusted R-squared	0.655945	S.D. dependent var	12.43226
S.E. of regression	7.292297	Akaike info criterion	6.901907
Sum squared resid	3031.123	Schwarz criterion	7.106015
Log likelihood	−211.4101	F-statistic	24.64070
Durbin-Watson stat	1.604122	Prob（F-statistic）	0.000000

をみてみる。そのプログラムは次の通りである。

equation eq5_4. ls（n）IMPNUMBER C IIP ZAIKORI JILTUKOU YENDOLL SOUTAI

（n）がNewey-Westの一致性のある推定を行うためのオプションである。

結果は表5.7に掲げるとおりである。分散とt統計値の修正を行うだけであるから、パラメータの値や決定係数などの統計量は5.49）式と変わるところはない。

ここまでは季節調整を行っていない原輸入数量指数を使って分析してきた。そこでは12ヶ月前と強い相関を持つことが疑われる（12次のAR項、12次のMA項はその可能性を示唆している）。季節変動を考慮する方法はいくつかがあるがここで12ヶ月前のデータとの階差をとり、両者の動きを比べてみよう。階差の取り方はEviewsでは2通りある。

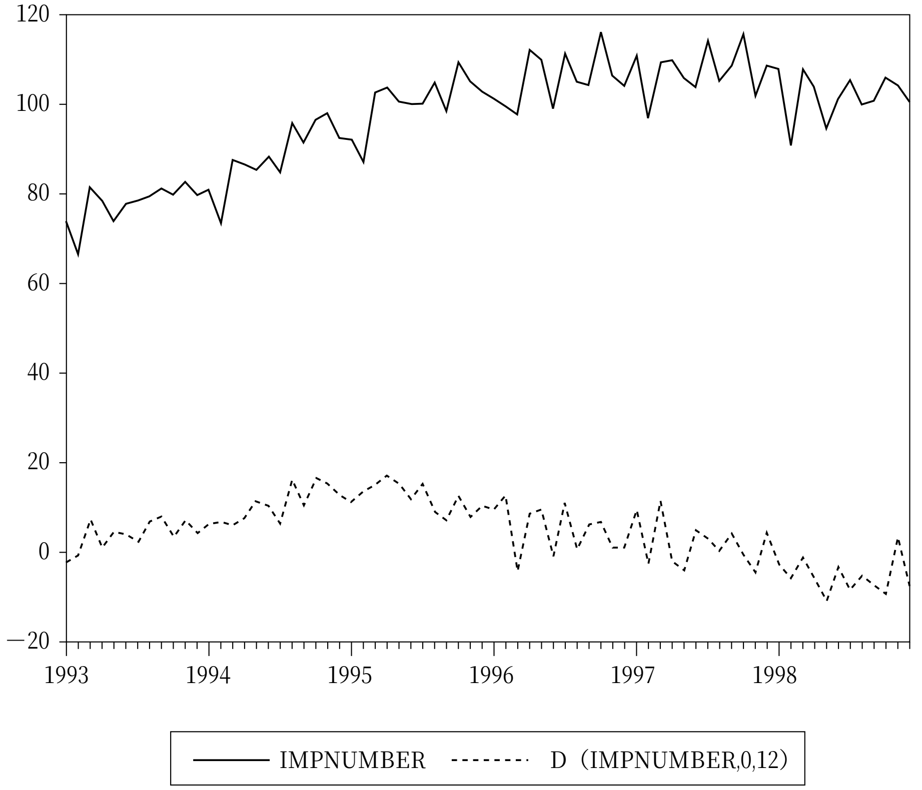
series IMPN12＝IMPNUMBER－IMPNUMBER(－12)

D（IMPNUMBER, 0, 12）

前者はラグをとり、$\triangle_{12}y_t = y_t - y_{t-12}$を計算するものである（ここではIMPN12と名付けて保存している）。

[20] ラグオペレータ（L）は次のように定義する。$Ly_t = y_{t-1}$と$L^s y_t = y_{t-s}$。これを用いると以下のように表される。nを階差、sを季節変動（seasonal difference）とし、$(1-L)^n y$と$(1-L)^n(1-L^s)y$を計算するコマンドはそれぞれD（y, n, O）とD（y, n, s）となる。

図5．3　原データと階差をとったデータの動き



後者はDで階差をとることを指示し（階差をとる変数、季節階差、階差の数）を指示するものである[20)]。IMPNUMBERとD(IMPNUMBER, 0, 12)をグラフ化したのが図5. 3である。図から原データであるIMPNUMBERには周期的な変動があることがうかがえる。

そこで12期の階差をとったモデルを次に分析しよう。

$\triangle_{12}IMPNUMBER_t = a + b_1\triangle_{12}IIP_t + b_2\triangle_{12}ZAIKORI_t + b_3\triangle_{12}JILTUKOU_t + b_4\triangle_{12}YENDOLL_t + b_5\triangle_{12}SOUTAI_t + e_t$

を推計するコマンドは以下の通りである。

equation eq 5 _5. ls D（IMPNUMBER, 0, 12）C D（IIP, 0, 12）D（ZAIKORI, 0, 12）D（JILTUKOU, 0, 12）D（YENDOLL, 0, 12）D（SOUTAI, 0, 12）

結果は表5. 8に掲げるとおりである（なお階差をとっているので変化幅を分析するモデルとなっており、水準を説明する5. 50）式とはもはや異なる経済モデルであることに留意する必要がある。被説明変数が違うので、R^2等でモデルの当てはまり具合を比較するのは不適切である）。

DWは1. 717であるから、系列相関の有無については判断は下せない。QテストとLM検定を行おう。階差をとっているので12次までのラグを見る。

Qテスト（表5. 8）では系列相関はないという帰無仮説は棄却されない。またLM検定統計量（表5. 9）は20. 198であり、p値は0. 063であるから、帰無仮説は５％水準で棄却されない。

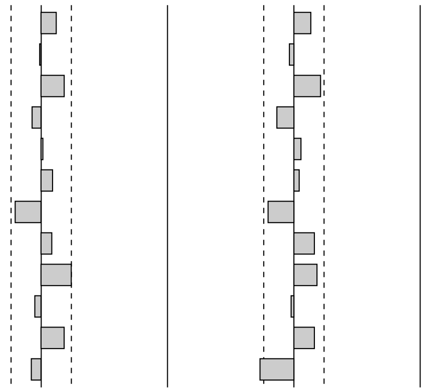
なお、このモデルをAR(1)、あるいはMA(1)で推計するには

equation eq5_6. ls D(IMPNUMBER, 0, 12) C D(IIP, 0, 12) D(ZAIKORI, 0, 12) D(JILTUKOU, 0, 12) D(YENDOLL, 0, 12) D(SOUTAI, 0, 12) AR(1)

表5.8a　Qテストとコレログラム

Date : 05/12/99　Time : 14:50
Sample : 1993:01 1998:03
Included observations : 63

Autocorrelation　Partial Correlation



	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.136	0.136	1.2140	0.271
2	−0.003	−0.022	1.2146	0.545
3	0.212	0.219	4.2816	0.233
4	−0.047	−0.115	4.4348	0.350
5	0.012	0.052	4.4443	0.487
6	0.100	0.040	5.1637	0.523
7	−0.195	−0.196	7.9318	0.339
8	0.088	0.162	8.5070	0.386
9	0.250	0.184	13.240	0.152
10	−0.030	−0.010	13.308	0.207
11	0.181	0.156	15.899	0.145
12	−0.080	−0.262	16.410	0.173

表5.8b　階差をとったモデルの推計

Dependent Variable: D（IMPNUMBER, 0, 12）
Method: Least Squares
Sample（adjusted）: 1993: 011998: 03
Included observations: 63after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	4.344512	0.561654	7.735213	0.0000
D(IIP, 0, 12)	1.271700	0.219176	5.802187	0.0000
D(ZAIKORI, 0, 12)	0.033550	0.109414	0.306629	0.7602
D(JILTUKOU, 0, 12)	−0.547483	0.112827	−4.852417	0.0000
D(YENDOLL, 0, 12)	−0.424744	0.085273	−4.980978	0.0000
D(SOUTAI, 0, 12)	−55.31297	18.10942	−3.054376	0.0034

R-squared	0.643531	Mean dependent var	6.177778
Adjusted R-squared	0.612262	S.D. dependent var	6.067030
S.E. of regression	3.777857	Akaike info criterion	5.586584
Sum squared resid	813.5156	Schwarz criterion	5.790692
Log likelihood	−169.9774	F-statistic	20.58033
Durbin−Watson stat	1.717375	Prob（F-statistic）	0.000000

表5．9　LMテスト３

Breusch-Godfrey Serial Correlation LM Test:

F-statistic	1.769586	Probability	0.083356
Obs*R-squared	20.19788	Probability	0.063434

Test Equation:
Dependent Variable: RESID
Method: Least Squares

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.562892	0.727675	0.773549	0.4432
D(IIP，０，12)	−0.059239	0.261016	−0.226955	0.8215
D(ZAIKORI，０，12)	−0.037406	0.130654	−0.286301	0.7760
D(JILTUKOU，０，12)	0.148264	0.181231	0.818096	0.4176
D(YENDOLL，０，12)	0.179200	0.166667	1.075196	0.2880
D(SOUTAI，０，12)	−8.386211	18.44072	−0.454766	0.6515
RESID（−１）	0.239484	0.150504	1.591217	0.1186
RESID（−２）	0.025090	0.161030	0.155810	0.8769
RESID（−３）	0.250894	0.149027	1.683545	0.0992
RESID（−４）	0.070718	0.169178	0.418009	0.6779
RESID（−５）	0.073159	0.167013	0.438044	0.6634
RESID（−６）	0.221079	0.182753	1.209717	0.2327
RESID（−７）	−0.179354	0.167107	−1.073288	0.2889
RESID（−８）	0.183930	0.168009	1.094760	0.2794
RESID（−９）	0.409237	0.178827	2.288454	0.0269
RESID（−10）	0.036932	0.181682	0.203277	0.8398
RESID（−11）	0.185161	0.202811	0.912973	0.3661
RESID（−12）	−0.370845	0.218846	−1.694546	0.0971

R-squared	0.320601	Mean dependent var	1.82E−15
Adjusted R-squared	0.063940	S.D. dependent var	3.622322
S.E. of regression	3.504605	Akaike info criterion	5.580989
Sum squared resid	552.7015	Schwarz criterion	6.193313
Log likelihood	−157.8012	F-statistic	1.249120
Durbin-Watson stat	2.085869	Prob（F-statistic）	0.268513

equation eq5_7. ls D(IMPNUMBER, 0, 12)C D(IIP, 0, 12) D(ZAIKORI, 0, 12) D(JILTUKOU, 0, 12) D(YENDOLL, 0, 12) D(SOUTAI, 0, 12) MA(1)

としてやればよい。このように分析者が考える次数を加えてやればよい（AR(3)を考えるのであれば、AR(1)、AR(2)、AR(3)と定式化する。MA(2)を考えるのであればMA(1)、MA(2)とする（なお計量の教科書ではAR(p)、MA(q)というときAR(1)からAR(p)、MA(1)からMA(q) の全てのラグを含むが、Eviewsのプログラムの表記はこれとは若干異なることに留意されたい）。

参考までにAR(1)の結果を掲げておく（表5.10)。下欄にARが定常性を満たしているかどうかが、**INVERTED AR Roots**（反転可能であったかどうか）の形で示されている。この場合0.22＜１であるから定常性を満たしている。（反転不能であれば**Estimated AR process is noninvertible**と表示される）。AR(1)の係数は統計的に有意ではない。

最後にARMAモデルの例を掲げておく。5.50）式の結果では12次のAR項、12次のMA項が示唆されていた。この推計プログラムは次の通りであ

表5.10　AR(1)モデルの推定

Dependent Variable: D（IMPNUMBER, 0, 12）
Method: Least Squares
Sample（adjusted）: 1993: 01　1998: 03
Included observations : 63after adjusting endpoints
Convergence achieved after 7 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	4.378128	0.704811	6.211780	0.0000
D(IIP，０，12)	1.383855	0.260039	5.321726	0.0000
D(ZAIKORI，０，12)	−0.018913	0.133558	−0.141610	0.8879
D(JILTUKOU，０，12)	−0.525707	0.135708	−3.873821	0.0003
D(YENDOLL，０，12)	−0.351130	0.105363	−3.332559	0.0015
D(SOUTAI，０，12)	−64.87948	21.30726	−3.044947	0.0035
AR（１）	0.219393	0.142315	1.541602	0.1288
R-squared	0.653690	Mean dependent var		6.177778
Adjusted R-squared	0.616586	S.D. dependent var		6.067030
S.E. of regression	3.756733	Akaike info criterion		5.589415
Sum squared resid	790.3303	Schwarz criterion		5.827541
Log likelihood	−169.0666	F-statistic		17.61750
Durbin-Watson stat	1.973934	Prob（F-statistic）		0.000000
Inverted AR Roots	.22			

る。

equation eq5_8. ls IMPNUMBER C IIP ZAIKORI JILTUKOU YENDOLL SOUTAI AR⑿　MA⑿

ここではAR(1)＝AR(2)＝…＝AR(11)＝０とMA(1)＝MA(2)＝…＝MA(11)＝０が仮定されている。すなわち12次の項のみが分析対象となっている。結果を見ると（表5.11）MAは反転可能であるが、ARの推計値に1.0や−1.00が含まれており、定常性に問題があることが示唆されている[21)]。

21)　ARMAを推定するのに色々な問題があるが一つは識別問題（indentification probem）である。この例では誤差項の過程は $e_t=\rho e_{t-1}+u_t+\theta u_{t-1}$ となり、$\rho=-\theta$ であればこの過程と $e_t=u_t$ を識別することができない。推定結果をみると $\rho=-\theta$ が成り立たないか、その状態に近いことがうかがわれる。

表5.11　AR(12)MA(12)モデルの推計

Dependent Variable: IMPNUMBER
Method: Least Squares
Sample（adjusted）: 1993: 011998: 03
Included observations: 63after adjusting endpoints
Convergence achieved after70iterations
Backcast: 1992: 011992: 12

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	502.6149	1028.534	0.488671	0.6270
IIP	1.120080	0.273624	4.093505	0.0001
ZAIKORI	−0.047022	0.150526	−0.312387	0.7559
JILTUKOU	−0.417238	0.128774	−3.240088	0.0020
YENDOLL	−0.388099	0.101032	−3.841359	0.0003
SOUTAI	−45.83807	23.28594	−1.968487	0.0541
AR（12）	0.985839	0.038383	25.68458	0.0000
MA（12）	−0.832435	0.044706	−18.62029	0.0000
R-squared	0.935511	Mean dependent var		96.28730
Adjusted R-squared	0.927303	S.D. dependent var		12.43226
S.E. of regression	3.352030	Akaike info criterion		5.375176
Sum squared resid	617.9858	Schwarz criterion		5.647320
Log likelihood	−161.3180	F-statistic		113.9795
Durbin-Watson stat	1.990884	Prob（F-statistic）		0.000000
Inverted AR Roots	1.00	.86−.50i	.86+.50i	.50+.86i
	.50−.86i	.00+1.00i	−.00−1.00i	−.50+.86i
	−.50−.86i	−.86−.50i	−.86+.50i	−1.00
Inverted MA Roots	.98	.85+.49i	.85−.49i	.49+.85i
	.49−.85i	−.00−.98i	−.00+.98i	−.49−.85i
	−.49+.85i	−.85+.49i	−.85−.49i	−.98

参考文献

系列相関の問題は、計量経済学の教科書では例外なく触れられている。

本章の理解を深める上では、以下のものが参考となろう。

山本拓［1988］『経済の時系列分析』創文社の第２章〜第４章は、AR、MAモデルに詳しい。

Kmenta, J［1997］*Elemens of Econometrics,* Michigan Ch8-3

Hill. R., Griffiths. w and G. Judge［1997］*Undergraduate ECONOMETRICS,* John Wiley & SonsのCh11は、DW統計などを分かりやすく説明している。

Davidson, R and J. MacKinnon［1993］*Estimation and Inference in Econometrics,* Oxford University Press Ch10

Johnston, J and J. DiNardo［1997］*ECONOMETRIC METHOD,* McGraw-Hill Ch6-6〜6.9, Ch7.1〜7.2 Greene. W［1997］*ECONOMETRIC ANALYSIS*（3rd), PrnticeHall CH13

はAR、MAやNewey-Westなどについても詳しい。