シリーズ

応用計量経済学(7)

横浜市立大学商学部　松浦　克己
大阪大学国際公共政策研究科　Colin McKenzie

第７章　連立方程式モデル

１　連立方程式バイアス

（経済活動の相互依存関係）

需要と供給は同時に決定される（Simultaneously determined, Jointly determined）ということを読者は聞かれたことがあるだろう。あるいはマクロ経済学で消費、所得、投資等が同時に決定されるKlein型の連立方程式モデル（Simultaneous equation models）を学ばれた人も多いであろう。

需要と供給が同時に決定されると言うことは、需要と供給が相互に影響することを想定している。

需要 ⟷ 供給

それは一方（たとえば需要）だけをみていては正しく判断できず、他方（供給）の動きも同時に考えなければならないと言うことである。供給を考える場合も需要の動きを同時に考える必要があるということである。

あるいは消費、所得、投資が同時に決定されると言うことは、

消費 ⟷ 所得

↕　　　↕

投資

のような３者の相互依存関係を明示的に考慮することである。

あるいは、

金利

↕　　　↕

貯蓄　　　投資

のような金利を通じて貯蓄と投資が間接的に影響しあう世界を考えることもできよう。

このように相互に関連する、あるいは他のものを通じて関連するということは、経済活動ではしばしばみられる所である。本章ではこの同時決定の問題について取り上げる。

（誘導型とOLSの連立方程式バイアス）

次のような需要供給関数を考える（簡単化のために定数項を除くことにする）。

$Q^d{}_t = a_1 p_t + a_2 income_t + e_{dt}$　　7. 1a）

$Q^s{}_t = b_1 p_t + b_2 cost_t + e_{st}$　　7. 1b）

$Q^d{}_t = Q^s{}_t = Q_t$　　7. 1c）

需要（Q^d）は価格（p）と所得（income）に依存し、供給（Q^s）は価格と費用（cost）に依存するとする。また需給は一致する（$Q^d{}_t = Q^s{}_t = Q_t$）ものとしよう。誤差項e_{dt}、e_{st}は、

$E(e_{dt}) = 0 \quad V(e_{dt}) = \sigma^2{}_d$　　7. 2a）

$E(e_{st}) = 0 \quad V(e_{st}) = \sigma^2{}_s$　　7. 2b）

$Cov(e_{dt}, e_{st}) = E(e_{dt} e_{st}) = \sigma_{ds} \neq 0$　　7. 2c）

$Cov(e_{dt}, e_{sj}) = E(e_{dt} e_{sj}) = 0 \quad j \neq t$　　7. 2d）

の仮定を充たすものとする。さらにe_{dt}とe_{st}はそれぞれ互いに相関しないことと、$income_t$と$cost_t$は非確率変数であることを仮定する。

7. 1a）～7. 1c）式のように体系を現したものを

構造方程式（structural model）という。7.1a)、7.1b）式を行動方程式（behavioral equations）という。モデルの中で決定されるQ、pを内生変数（endogenous variables)、モデルの外から与えられるincome, costを外生変数（exogenous variables）という。これから外生変数は非確率変数と仮定する。

7.1a）に替えて

$Q^d_t = a_1 p_t + a_2 income_t + a_3 Q^d_{t-1} + e_{dt}$

のQ^d_{t-1}ように、ラグ付き内生変数が説明変数として含まれることがある。これを先決内生変数ということがある。先決内生変数と外生変数を併せて先決変数（predetermined variables）という。一般的にいって、行動方程式では被説明変数を内生変数と先決変数で説明する。

7.1a）～7.1c）式をQ_tとp_tについて解いてみよう。

$$Q_t = \frac{-a_2 b_1}{a_1 - b_1} income_t + \frac{a_1 b_2}{a_1 - b_1} cost_t + \frac{(a_1 e_{st} - b_1 e_{dt})}{a_1 - b_1} \tag{7.3a)}$$

$$p_t = \frac{-a_2}{a_1 - b_1} income_t + \frac{b_2}{a_1 - b_1} cost_t + \frac{e_{st} - e_{dt}}{a_1 - b_1} \tag{7.3b)}$$

これを次のように表記することがある。

$$Q_t = \pi_{11} income_t + \pi_{12} cost_t + e_{1t} \tag{7.3a)'}$$

$$p_t = \pi_{21} income_t + \pi_{22} cost_t + e_{2t} \tag{7.3b)'}$$

$$\pi_{11} = \frac{-a_2 b_1}{a_1 - b_1} \quad \pi_{12} = \frac{a_1 b_2}{a_1 - b_1} \quad e_{1t} = \frac{(a_1 e_{st} - b_1 e_{dt})}{a_1 - b_1} \tag{7.4a)}$$

$$\pi_{21} = \frac{-a_2}{a_1 - b_1} \quad \pi_{22} = \frac{b_2}{a_1 - b_1} \quad e_{2t} = \frac{e_{st} - e_{dt}}{a_1 - b_1} \tag{7.4b)}$$

このように内生変数を先決変数（この場合は外生変数のみである）と誤差項に関して解いたものを、構造方程式の誘導型（reduced form, reduced form equation）という。

この誘導型をOLSで推計した場合どのような問題があるかを考えてみよう。仮定により7.3a)'式と7.3b)'式にある説明変数は非確率変数である。また7.3a)'、7.3b)'式から誤差項はe_{dt}とe_{st}の線形結合となっていることが分かる。e_{dt}とe_{st}は標準線形回帰モデルの仮定を充たすので、e_{1t}とe_{2t}も同じ仮定を充たすことを簡単に証明することができる。7.3a)'式と7.3b)'式をそれぞれOLSで推定するとπ_{ij}の推定量は不偏性と一致性をもつ。

7.1a）式と7.1b）式をOLSで推計した場合どのような問題があるかを考えてみよう。7.3b）式より7.1a）式と7.1b）式にあるp_tは確率変数であることが分かる。その説明変数と誤差項（e_{dt}とe_{st}）が相関するかどうかを調べよう。7.3b)'式を利用するとp_tとe_{dt}の共分散は

$$\begin{aligned} Cov(p_t, e_{dt}) &= Cov\left(\frac{e_{st} - e_{dt}}{a_1 - b_1},\ e_{dt}\right) \\ &= \frac{1}{a_1 - b_1}\left(E(e_{dt} e_{st}) - E(e_{dt}^2)\right) \\ &= (\sigma_{ds} - \sigma^2_d)/(a_1 - b_1) \end{aligned} \tag{7.5)}$$

となる。7.5）式より$E(e_{dt}^2)$と$E(e_d e_s)$が相殺しない限り、p_tとe_{dt}は相関を持つことが分かる。しかし$E(e_{dt}^2)$と$E(e_d e_s)$が相殺するということは、一般的には起こりそうにない。またp_tとe_{st}の共分散を考えると

$$\begin{aligned} Cov(p_t, e_{st}) &= Cov\left(\frac{e_{st} - e_{dt}}{a_1 - b_1},\ e_{st}\right) \\ &= \frac{1}{a_1 - b_1}\left(E(e_{dt}^2) - E(e_{dt} e_{st})\right) \\ &= (\sigma^2_s - \sigma_{ds})/(a_1 - b_1) \end{aligned} \tag{7.6)}$$

であり、同様の問題が生じる。

このように7.1a）式と7.1b）式の相互のフィードバックを考えずに、単独にOLS推計すると、第６章と同じように説明変数と誤差項が相関するので、推定量は不偏性と一致性を持たない。これによって生じるバイアスは連立方程式バイアス（simultaneous equation bias）と呼ばれている。

次のような簡単な消費関数を考える。

$$\mathrm{consumption}_t = a_0 + a_1 \mathrm{income}_t + e_t \qquad 7.7a)$$

$$\mathrm{income}_t = \mathrm{consumption}_t + \mathrm{investment}_t \qquad 7.7b)$$

7.7b）式は、所得＝消費＋投資の関係を示す定義式（identity equation）である。ここではinvestmentを外生変数としている。$V(e_t)=\sigma^2_e$とする。

第１章のOLSの正規方程式より

$$\hat{a}_1 = \frac{\Sigma(\mathrm{consumption}_t - \overline{\mathrm{consumption}})(\mathrm{income}_t - \overline{\mathrm{income}})}{\Sigma(\mathrm{income}_t - \mathrm{income})(\mathrm{income}_t - \mathrm{income})}$$

である。7.7a)、7.7b)式をconsumptionとincomeの誘導型で現すと

$$\mathrm{consumption}_t = \frac{a_0}{1-a_1} + \frac{a_1}{1-a_1}\mathrm{investment}_t + \frac{e_t}{1-a_1} \qquad 7.7a)'$$

$$\mathrm{income}_t = \frac{a_0}{1-a_1} + \frac{1}{1-a_1}\mathrm{investment}_t + \frac{e_t}{1-a_1} \qquad 7.7b)'$$

となる。これから消費も所得も誤差項e_{1t}の関数であることが分かる。

income_tとe_tの共分散を考えると

$$\mathrm{Cov}(\mathrm{income}_t,\ e_t) = \mathrm{Cov}\left(\frac{e_t}{1-a_1},\ e_t\right) = \frac{\sigma^2_e}{1-a_1} \qquad 7.8)$$

となる。income_tとe_tは相関を持つので、7.7a）式をOLSで推計すればバイアスが生じる。正規方程式に

$$\mathrm{consumption}_t - \overline{\mathrm{consumption}} = a_1(\mathrm{income}_t - \overline{\mathrm{income}}) + (e_t - \bar{e})$$

を代入し、7.8）式を利用すると

$$\hat{a}_1 = a_1 + \frac{\Sigma(\mathrm{income}_t - \overline{\mathrm{income}})e_t}{\Sigma(\mathrm{income}_t - \overline{\mathrm{income}})(\mathrm{income}_t - \overline{\mathrm{income}})}$$

$$\mathrm{plim}\,\hat{a}_1 = a_1 + \frac{\sigma^2_e}{(1-a_1)\mathrm{plim}[\Sigma(\mathrm{income}_t - \mathrm{income})(\mathrm{income}_t - \mathrm{income})/T]} \qquad 7.9)$$

となる。7.9）式の右辺第二項がゼロとなることはないので、ここでもOLSの推計にバイアスが生じることが確かめられる。

より一般的な連立方程式を考えてみよう。

$$y_{1t} = a_1 y_{2t} + a_2 x_{1t} + e_{1t} \qquad 7.10a)$$

$$y_{2t} = b_1 y_{1t} + b_2 x_{2t} + e_{2t} \qquad 7.10b)$$

誤差項e_{1t}，e_{2t}は、

$E(e_{1t})=0 \quad V(e_{1t})=\sigma^2_1$

$E(e_{st})=0 \quad V(e_{st})=\sigma^2_s$

$\mathrm{Cov}(e_{1t},\ e_{2t}) = E(e_{1t},\ e_{2t}) = \sigma_{12} \neq 0$

の仮定を充たすものとする。

7.10a）式と7.10b）式の誘導型は

$$y_{1t} = \frac{a_2}{1-a_1b_1}x_{1t} + \frac{a_1b_2}{1-a_1b_1}x_{2t} + \frac{e_{1t}+a_1e_{2t}}{1-a_1b_1} \qquad 7.10a)'$$

$$y_{2t} = \frac{a_2b_1}{1-a_1b_1}x_{1t} + \frac{b_2}{1-a_1b_1}x_{2t} + \frac{b_1e_{1t}+e_{2t}}{1-a_1b_1} \qquad 7.10b)'$$

である。誘導型の誤差項はe_{1t}とe_{2t}の線形結合となっている。これは7.3a)、7.3b）式と同様のケースである。y_{1t}とe_{2t}、y_{2t}とe_{1t}の共分散は各々、

$$\mathrm{Cov}(y_{1t},\ e_{2t}) = \mathrm{Cov}\left(\frac{e_{1t}+a_1e_{2t}}{1-a_1b_1},\ e_{2t}\right) = \frac{1}{1-a_1b_1}(E(e_{1t}e_{2t}) + a_1V(e_{2t})) = \frac{(\sigma_{12}+a_1\sigma^2_2)}{1-a_1b_1} \qquad 7.11a)$$

$$\mathrm{Cov}(y_{2t},\ e_{1t}) = \mathrm{Cov}\left(\frac{b_1e_{1t}+e_{2t}}{1-a_1b_1},\ e_{1t}\right) = \frac{1}{1-a_1b_1}(E(e_{1t}e_{2t}) + b_1V(e_{2t})) = \frac{(\sigma_{12}+b_1\sigma^2_2)}{1-a_1b_1} \qquad 7.11b)$$

となる。y_{1t}とe_{2t}、y_{2t}とe_{1t}はいずれも相関を持つので7.10a)、7.10b）式をOLSで推計すると、推定

量は不偏性と一致性を持たないことが分かる。

このように変数間（方程式間）に相互依存関係がある場合、OLSの推計量は一致性も不偏性もなくなる連立方程式バイアスを生じることになる。

2　識別問題

具体的な推計方法に入る前に、連立方程式が推計可能かどうかという識別問題（identification problem）について触れることにする。これは構造方程式のパラメータが誘導型の方程式のパラメータにより、一意的に定まるかどうか、あるいは複数の解があるか、または解を求めることができないのかという問題である。

（丁度識別）

先の需要供給関数の例を取り上げてみる。両者の関係は以下のようであった。

$$\pi_{11}=\frac{-a_2b_1}{a_1-b_1}\quad \pi_{12}=\frac{a_1b_2}{a_1-b_1} \qquad 7.4a)$$

$$\pi_{21}=\frac{-a_2}{a_1-b_1}\quad \pi_{22}=\frac{b_2}{a_1-b_1} \qquad 7.4b)$$

これから$a_1=\frac{\pi_{12}}{\pi_{22}}$　$b_1=\frac{\pi_{11}}{\pi_{21}}$となる。従って

$a_1-b_1=\frac{\pi_{12}\pi_{21}-\pi_{11}\pi_{22}}{\pi_{21}\pi_{22}}$となる。これらを代入して$a_2$、$b_2$を解くと

$$a_2=(\pi_{11}\pi_{22}-\pi_{12}\pi_{21})/\pi_{22}$$

$$b_2=(\pi_{12}\pi_{21}-\pi_{11}\pi_{22})/\pi_{21}$$

となる。構造方程式のパラメータは誘導型のパラメータにより全て一意的に定まる。このとき、7.3a）式、7.3b）式は丁度識別、適度識別（just identification, exactly identified）という。

（過小識別）

モデルが

$$Q^d_t=a_1p_t+e_{dt} \qquad 7.1a)'$$

$$Q^s_t=b_1p_t+b_2cost_t+e_{st} \qquad 7.1b)$$

のようであったとする（$Q^d_t=Q^s_t=Q_t$）。7.1a）式と7.1a）'式を比較すると、7.1a）式に$a_2=0$の制約を与えると7.1a）'式が得られるので、7.4a）式と7.4b）式に同じ$a_2=0$の制約条件を与えると7.1a）'式と7.1b）式の誘導型が得られる。それは次のようである。

$$Q_t=\frac{a_1b_2}{a_1-b_1}cost_t+\frac{a_1e_{st}-b_1e_{dt}}{a_1-b_1}=\pi_{11}cost_t+u_{1t}$$

$$p_t=\frac{b_2}{a_1-b_1}cost_t+\frac{e_{st}-e_{dt}}{a_1-b_1}=\pi_{21}cost_t+u_{2t}$$

これから

$a_1=\pi_{11}/\pi_{21}$となり、構造方程式の需要関数のパラメータは誘導型から一意に定まる。しかし$b_2=\pi_{21}(\pi_{11}/\pi_{21}+b_1)$であり、$b_1$と$b_2$を求めることはできない。したがって供給関数は識別されない（not-identified）。これを過小識別（under-identification）ということがある。

（過剰識別）

$$Q^d_t=a_1p_t+e_{dt} \qquad 7.1a)'$$

$$Q^s_t=b_1p_t+b_2cost_t+b_3z_t+e_{st} \qquad 7.1b)'$$

を考えてみよう。ここでzは供給に影響する何らかの要因である。これを誘導型の形で現すと以下の通りである。

$$Q_t=\frac{a_1b_2}{a_1-b_1}cost_t+\frac{a_1b_3}{a_1-b_1}z_t+\frac{a_1e_{st}-b_1e_{dt}}{a_1-b_1}$$

$$=\pi_{11}cost_t+\pi_{12}z_t+v_{1t}$$

$$p_t=\frac{b_2}{a_1-b_1}cost_t+\frac{b_3}{a_1-b_1}z_t+\frac{e_{st}-e_{dt}}{a_1-b_1}$$

$$=\pi_{21}cost_t+\pi_{22}z_t+v_{2t}$$

これから

$$a_1=\pi_{11}/\pi_{21},\quad a_1=\pi_{12}/\pi_{22}$$

となりa_1については複数の解が求められる。このような場合を過剰識別（over-identification）という。過剰識別の場合は誘導型の計算は可能であるが、その誘導型から経済的に一義的な解釈を求めることは困難である。なおこの例では供給関数については解が求められない。

（次数条件）

この識別問題については、以下の次数条件（order condition）が知られている。

方程式の全体系の内生変数の数をM個とする。当該方程式（たとえば需要関数や供給関数）に現れる内生変数の数をm個とする。方程式の全体系の外生変数をK個とし、そのうち当該方程式に現れる外生変数の数をk個とする。

$m+k-1<K$または$M-1<(M+K)-(m+k)$
当該方程式は過剰識別される。

$m+k-1=K$または$M-1=(M+K)-(m+k)$
当該方程式は丁度識別される[1)]。

$m+k-1>K$または$M-1>(M+K)-(m+k)$
当該方程式は過小識別される。

なおこの次数条件は必要条件であるが、十分条件ではない[2)]。

この条件を7.1a）'式と7.1b）'式に適用しよう。このシステムでは$M=2$（p_tとQ_t）と$K=2$（$cost_t$とz_t）となる。7.1a）'式の場合$m=2$, $k=0$、すなわち$m+k-1=1<K=2$なので7.1a）'式は過剰識別される。7.1b）'式の場合$m=2$, $k=2$、すなわち$m+k-1=3>K=2$なので7.1b）'式は過小識別される。

3　二段階最小自乗法

連立方程式でよく用いられる推定方法に二段階最小自乗法（two–stage least squares. 2SLS）がある。

$$y_{1t}=a_1y_{2t}+a_2x_{1t}+e_{1t} \qquad 7.10a)$$

$$y_{2t}=b_1y_{1t}+b_2x_{2t}+e_{2t} \qquad 7.10b)$$

を再び考えてみよう。誤差項e_{1t}とe_{2t}は標準的仮定を充たすものとする。先の次数条件を調べると、両式は丁度識別されている。

この誘導型は

$$y_{1t}=\frac{a_2}{1-a_1b_1}x_{1t}+\frac{a_1b_2}{1-a_1b_1}x_{2t}+\frac{e_{1t}+a_1e_{2t}}{1-a_1b_1}$$

$$=\pi_{11}x_{1t}+\pi_{12}x_2+v_{1t} \qquad 7.10a)'$$

$$y_{2t}=\frac{a_2b_1}{1-a_1b_1}x_{1t}+\frac{b_2}{1-a_1b_1}x_{2t}+\frac{b_1e_{1t}+e_{2t}}{1-a_1b_1}$$

$$=\pi_{21}x_{1t}+\pi_{22}x_{2t}+v_{2t} \qquad 7.10b)'$$

であった。この7.10a）'式と7.10b）'式をそれぞれOLSで推計し、それらの予測値を求める。

$$\hat{y}_{1t}=\hat{\pi}_{11}x_{1t}+\hat{\pi}_{12}x_{2t}$$

$$\hat{y}_{2t}=\hat{\pi}_{21}x_{1t}+\hat{\pi}_{22}x_{2t}$$

$\hat{y}_{1t}$と$\hat{y}_{2t}$はいずれも先決変数の関数であるから、誤差項v_{1t}, v_{2t}とは相関を持たない。この予測値（推定量）を7.10a)、7.10b）式に代入し、OLSで推計する。

$$y_{1t}=a_1\hat{y}_{2t}+a_2x_{1t}+e_{1t}+a_1(y_{2t}-\hat{y}_{2t}) \qquad 7.10a)''$$

$$y_{2t}=b_1\hat{y}_{1t}+b_2x_{2t}+e_{2t}+b_1(y_{1t}-\hat{y}_{1t}) \qquad 7.10b)''$$

7.10a）''式のOLS正規方程式を考える（Sを目的関数とする）と次のようである。

$$\partial S/\partial a_1=\Sigma(-y_{1t}+\hat{a}_1\hat{y}_{2t}+\hat{a}_2x_{1t})(\hat{y}_{2t})=0$$

$$\partial S/\partial a_2=\Sigma(-y_{1t}+\hat{a}_1\hat{y}_{2t}+\hat{a}_2x_{1t})(x_{1t})=0$$

ここで7.10b）'式のOLS残差を$\hat{v}_{2t}$とし、$y_{2t}=\hat{y}_{2t}+\hat{v}_{2t}$の関係を利用すると

$$\partial S/\partial a_1=\Sigma(-y_{1t}+\hat{a}_1\hat{y}_{2t}+\hat{a}_2x_{1t})(y_{2t})$$
$$-\hat{a}_1\Sigma\hat{y}_{2t}\hat{v}_{2t}=0 \qquad 7.12a)$$

$$\partial S/\partial a_2=\Sigma(-y_{1t}+\hat{a}_1\hat{y}_{2t}+\hat{a}_2x_{1t})(x_{1t})$$
$$-\hat{a}_1\Sigma x_{1t}\hat{v}_{2t}=0 \qquad 7.12b)$$

---

1) 丁度識別のモデルを作成する最も簡便な方法は、その方程式にのみ現れる先決変数をただ1個だけ加えることである。モデル体系の全ての方程式がこの条件を満たすとき、モデル全体も識別される。たとえば次のような例である。
$y_{1t}=a_0+a_1y_{2t}+\cdots+a_{h-1}y_{ht}+c_1x_{1t}+{}_dz_k+e_{1x}$
$y_{2t}=a_0'+a_1'y_{2t}+\cdots+a_{h-1}'y_{ht}+c_1'x_{1t}+{}_d'w_k+e_{2x}$
$y_{hk}=a''+a_1''y_{1t}+\cdots+a_{h-1}''y_{h-1t}+c''x_{1t}+{}_d''u_k+e_{ht}$
ここではz_k, w_k, …u_kが各方程式を丁度識別し、かつモデル全体を識別するために入れられている。他の変数は方程式間で共通である。

2) 必要十分条件（necessary and sufficient condition）は階数条件（rank condition）として知られる。これを行列を使わずに説明したものとしてMaddala［1992］のCh 9–4、Mukherjee et al ［1998］のCh 13–5がある。

を得ることができる。残差と被説明変数の予測値は直交する（$\Sigma \hat{y}_{2t} \hat{v}_{2t} = 0$）、説明変数と残差は直交する（$\Sigma x_{1t} \hat{v}_{2t} = 0$）から、7.12a）、7.12b）式は

$$\partial S / \partial a_1 = \Sigma(-y_{1t} + \hat{a}_1 \hat{y}_{2t} + \hat{a}_2 x_{1t})(y_{2t}) \quad 7.12a)'$$

$$\partial S / \partial a_2 = \Sigma(-y_{1t} + \hat{a}_1 \hat{y}_{2t} + \hat{a}_2 x_{1t})(x_{1t}) \quad 7.12b)'$$

となる。これが２SLSの推定量の求め方である（7.10b）式についても全く同様に求めることができる)。すなわち

第一段階　誘導型で内生変数の予測値を求める（7.10a）'、7.10b）'式の推計)。

第二段階　第一段階で求めた内生変数の予測値を説明変数として推計し、係数を求める（7.10a）''、7.10b）''式の推計)。

の二段階の最小自乗法により方程式を推計する[3)]。

２SLSはこのように連立方程式の各方程式を一本毎に解くものである。その正規方程式をみると、内生変数の予測値を作成する時にシステムの外生変数を全て利用するが、他の方程式の構造に関する情報は使わないことが分かる(7.12a）'式、7.12b）'式)。このことは連立方程式の中で、ある方程式に定式化の誤りがあったとしても、他の方程式にはその誤りが波及しないことを意味している。

４　Eviewsによる２SLSの推計例

Eviewsで２SLSの推計を行ってみよう。Eviewsで２SLSを行う場合、方程式は次数条件を満たしておく必要がある（丁度識別または過剰識別で解が求められる)。次数条件を満たしていない場合（過小識別で解が求められない)、Eviewsはその旨を表示するので、次数条件を満たすように方程式を変更することが求められる。

次のような貸出市場モデルを考える。

貸出需要＝f(金利、鉱工業生産指数)

貸出供給＝g(金利、国債応募者利回り)

これは7.1a）～7.1c）でみた需要供給関数に対応する。具体的には次のモデルを考える。

$$Log(Loan_t/wpi_t) = a_0 + a_1 Rate_t + a_2 IIP_t + e_{1t}$$

$$Log(Loan_t/wpi_t) = b_0 + b_1 Rate_t + b_2 BondRate_t + e_{2t}$$

Loan（銀行の貸出残高)、wpi（総合卸売物価指数)、Rate（新規貸出約定金利)、IIP（鉱工業生産指数)、BondRate（10年もの国債応募者利回り）である（日銀統計月報による)。

内生変数はLog（$Loan_t/wpi_t$）と$Rate_t$である。外生変数はIIP_tと$BondRate_t$である。需要関数、供給関数共に丁度識別のケースであることを読者は確かめられたい。

分析期間は93年10月から98年12月である。いうまでもなくこの期間は超低金利政策が採用された不況の局面である。本来マクロの時系列データを用いた分析では、分析期間に少なくとも一回の景気循環を含むことが望ましい。さもなければ推計結果が不況（好況）の一方のデータに左右され、推計結果が偏る可能性があるからである。ここでは新規貸出約定金利が93年10月以降に限り公開されているので、データの利用可能性の問題から分析期間を不況期に限定せざるをえなかった。

データは既に読み込み加工してあるものとして、プログラムをみてみる。

$$Log(Loan_t/wpi_t) = a_0 + a_1 Rate_t + a_2 IIP_t + e_{1t}$$

$$Log(Loan_t/wpi_t) = b_0 + b_1 Rate_t + b_2 BondRate_t + e_{2t}$$

を推計するコマンドは次の通りである。(なおLog（$Loan_t/wpi_t$）をLOANOUTと表記している）。

equation　eq７_1. tsls　LOANOUT　C　RATE

---

3)　第６章で操作変数法の説明を行ったが、操作変数のz_tをy_{2t}に置き換えると、同一の問題に帰着することを読者は確かめられたい。したがって２SLSの推定寮は一致性を有するが不偏性はない。

表７－１　貸出需要関数

Dependent Variables: LOANOUT
Method: Two-Stage Least Squares
Sample：1993：10 1998：12
Included observations：63
Instrument list: C IIP BONDRATE

Variable	Coefficient	Std.Error	t-Statistic	Prob.
C	10.82310	0.028411	380.9488	0.0000
RATE	−0.015207	0.002618	−5.808789	0.0000
IIP	− 0.00163	0.000247	−0.657961	0.5131
R-squared	0.415061	Mean dependent var		10.76898
Adjusted R-squared	0.395563	S.D. dependent var		0.015025
S.E. of regression	0.011681	Sum squared resid		0.008187
F-statistic	19.20480	Durbin-Watson stat		0.806136
Prob （F-statistic）	0.000000			

表７－２　貸出供給関数

Dependent Variable: LOANOUT
Method: Two-Stage Least Squares
Sample：1993：10 1998：12
Included observations：63
Instrument list: C IIP BONDRATE

Variable	Coefficient	Std.Error	t-Statistic	Prob.
C	10.80245	0.006892	1567.359	0.0000
RATE	−0.009844	0.007249	−1.357909	0.1796
BONDRATE	−0.003033	0.004537	−0.668450	0.5064
R-squared	0.433274	Mean dependent var		10.76898
Adjusted R-squared	0.414383	S.D. dependent var		0.015025
S.E. of regression	0.011498	Sum squared resid		0.007932
F-statistic	19.82199	Durbin-Watson stat		0.794232
Prob （F-statistic）	0.000000			

IIP @ IIP BondRate
equation eq７_2. tsls　LOANOUT C RATE BondRate @ IIP BondRate

２SLSのコマンドは、前章で紹介した操作変数法と同様の形式である。

equation　方程式名．TSLS　被説明変数　説明変数　@　操作変数

として推計する。なおここでは操作変数に定数項を明示的に入れていないが、その場合でも定数項が操作変数に自動的に含められることは、IV法のケースと同じである。

結果は表７－１、７－２に掲げるとおりである。

需要関数ではa_1＜０で１％水準で有意に符号条件を満たしている。ただしa_2＜０であり、符号条件は満たされていない（しかし統計的には有意ではない）。

供給関数でもb_1＜０と符号条件を満たしていない（統計的には有意ではない）。これは分析期間の特異性を反映しているのかもしれない。

ちなみにこれらをOLSで推計した結果は次の通

りであった。

$$\mathrm{Log}(\mathrm{Loan}_t/\mathrm{wpi}_t)=\underset{(406.7)}{10.81}\ \underset{(-6.23)}{-0.014\mathrm{Rate}_t}$$

$$\underset{(-0.39)}{-0.94\mathrm{E}-5\,\mathrm{IIP}_t}+e_{1t}$$

$\mathrm{Adj}R^2=0.401$　$DW=0.787$

$$\mathrm{Log}(\mathrm{Loan}_t/\mathrm{wpi}_t)=\underset{(2092.68)}{10.80}\ \underset{(-2.84)}{-0.010\mathrm{Rate}_t}$$

$$\underset{(-1.23)}{-0.003\mathrm{BondRate}_t}+e_{2t})\ \hat{}$$

$\mathrm{Adj}R^2=0.414$　$DW=0.795$

（２SLSの決定係数）

OLSでモデルの適合度はRSSとTSSをそれぞれ残差平方和と総平方和とし、$R^2=1-RSS/TSS$を用いて行われた。Eviewsのoutputにみられるように２SLSでもR^2や$\mathrm{Adj}R^2$が計算されるのが通例である。しかし２SLSのR^2とOLSのR^2を比較することはできない。

たとえば２SLSの場合$R^2=1-RSS/TSS$の値が正となる必然性は必ずしも無いのである。

その人為的な例（artificial case）を示しておこう。以下の式を推計する。

$$\mathrm{Log}(\mathrm{Loan}_t/\mathrm{wpi}_t)=a_0+a_1\mathrm{Rate}_t+a_2\mathrm{IIP}_t+a_3\mathrm{Log}(\mathrm{Loan}_{t-1}/\mathrm{wpi}_{t-1})+e_{1t}$$

$$\mathrm{Log}(\mathrm{Loan}_t/\mathrm{wpi}_t)=b_0+b_1\mathrm{Rate}_t+b_2\mathrm{TOPIX}_t+b_3\mathrm{SIKIN}_t+e_{2t}$$

TOPIXは東証株価指数、SIKINは実質預金、債券、信託元本の合計である（wpiで基準化する）。結果は次の通りである。

$$\mathrm{Log}(\mathrm{Loan}_t/\mathrm{wpi}_t)=\underset{(1.57)}{14.70}\ \underset{(-1.37)}{-0.33\mathrm{Rate}_t}$$

$$\underset{(-0.39)}{-0.0008\mathrm{IIP}_t}\ \underset{(-0.41)}{-0.35\mathrm{Log}(\mathrm{Loan}_{t-1}/\mathrm{wpi}_{t-1})}+e_{1t}$$

$\mathrm{Adj}R^2=-0.401$　$R^2=-0.33$　$DW=0.564$

$F=8.86$

$$\mathrm{Log}(\mathrm{Loan}_t/\mathrm{wpi}_t)=\underset{(3.41)}{8.47}\ \underset{(-1.46)}{-0.012\mathrm{Rate}_t}$$

$$\underset{(-1.43)}{-1.33\mathrm{E}-5\,\mathrm{TOPIX}_t}\ \underset{(0.95)}{+0.211\mathrm{SIKIN}_t}+e_{2t}$$

$\mathrm{Adj}R^2=0.467$　$R^2=0.529$　$DW=0.848$

$F=29.33$

需要関数のR^2は負となっている。他方でF値から$a_1=a_2=a_3=0$の帰無仮説は１％水準で棄却されている。

連立方程式の場合には、モデルの選択は個々の説明変数が有意に符号条件を満たしているか、あるいはその方程式の予測誤差が小さいかによることが多い。従って連立方程式モデルの場合R^2や$\mathrm{Adj}R^2$の報告は省略されることがある[4)]。

４　２SLSの仮説の検定

4.1　外生性の検定（exogeneity test）

ここまでは内生変数と外生変数をアプリオリに区別してきた。しかし内生変数とされたものが誤差項と相関を持たなければ、OLSで推定すればBLUEとなり、その方がより好ましい。あるいは操作変数は誤差項と相関しないものとして議論を進めてきた。仮に誤差項とある変数が相関を持っていれば、その変数は操作変数の候補として好ましいものではない。

ある変数が誤差項と相関を有するかどうかという意味での外生性の検定（exogeneity test, Wu-Hausman test）が行われる。これは第２章の除外変数（omitted variables）や第３章のJテストなどと共通した考え方にたつものである。

$$y_{1t}=a_0+a_1y_{2t}+a_2x_{1t}+e_{1t} \qquad 7.13a)$$

$$y_{2t}=b_0+b_1z_{1t}+b_2z_{2t}+e_{2t} \qquad 7.13b)$$

を想定しよう。7.13a）式においてy_{2t}が外生であ

4) 決定係数がモデルの適合度としての意味を持つのはOLSだけといってもよい。慣習的に２SLSや３SLS等の連立方程式体系、場合によっては最尤法による推計でも疑似決定係数が報告されることがある。OLSとは異なるということに留意しない限りミスリードする可能性がある。

るかどうかが問題であるとする。外生変数であれば7.13a）式のOLSの推定量が最も好ましい。この仮説を検定するWu–Hausman　testは以下のように行われる。

y_{2t}を全ての外生変数に回帰する（y_{2t}の誘導型を推計する）。

$$y_{2t}=\pi_0+\pi_1 z_{1t}+\pi_2 z_{2t}+\pi_3 x_{1t}+u_{2t} \qquad 7.14)$$

その予測値を$\hat{y}_{2t}$とする。これを7.12a）式の説明変数に加えて

$$y_{1t}=a_0+a_1 y_{2t}+a_2 x_{1t}+a_3\hat{y}_{2t}+e_{1t} \qquad 7.15)$$

をOLSで推計し、$a_3=0$のt検定を行う。7.13a）式でy_{2t}が外生変数であれば、付け加えられた$\hat{y}_{2t}$は7.15）式では余り予測力はないはずである。$a_3=0$の帰無仮説が棄却されなければ、y_{2t}は外生変数である。帰無仮説が棄却されれば内生変数ということになる。

あるいは複数の変数が同時に外生変数であるかどうか疑問なときは、第２章でみた複合仮説検定のF検定を行うことになる。

たとえば

$$y_{1t}=a_0+a_1 y_{2t}+a_2 y_{3t}+a_3 x_{1t}+e_{1t}$$

においてy_{2t}、y_{3t}の外生性を同時に検定するときは、y_{2t}、y_{3t}を各々誘導型で推計し、その予測値（$\hat{y}_{2t}, \hat{y}_{3t}$）を用いて

$$y_{1t}=a_0+a_1 y_{2t}+a_2 y_{3t}+a_3 x_{1t}+a_4\hat{y}_{2t}+a_5\hat{y}_{3t}+e_{1t}$$

をOLSで推計し、$a_4=a_5=0$のF検定を行う。$a_4=a_5=0$の帰無仮説が棄却されれば、y_{2t}、y_{3t}は外生変数とみなすことはできない。

（Eviewsによる推計例）

先の貸出市場の例で、約定貸出金利が外生かどうかについてみてみよう。

・$Rate_t$を誘導型$Rate_t=c+\pi_1 IIP_t+\pi_2 BondRate_t+u_t$で推計する（式の名前はwuとする）。

equation wu.LS Rate c iip bondrate

・$Rate_t$の予測値をratefitと名付けて保存する。

wu.FIT ratefit

・ratefitを変数に加えOLSで推計する。

・$Log(Loan_t/wpi_t)=a_0+a_1 Rate_t+a_2 IIP_t+a_3 ratefit_t+v_{1t}$

・$Log(Loan_t/wpi_t)=b_0+b_1 Rate_t+b_2 BondRate_t+b_3 ratefit_t+v_{2t}$

equation　wh1.LS　Loanout　c　RATE　IIP　RATEFIT

equation wh2.LS Loanout c RATE BondRate

表７−３　Wu-Hausmanテスト(1)

Dependent Variable: LOANOUT
Method: Least Squares
Sample：1993：10　1998：12
Included observations：63

Variable	Coefficient	Std.Error	t-Statistic	Prob.
C	10.82310	0.028201	383.7841	0.0000
RATE	−0.009770	0.003948	−2.474648	0.0162
IIP	−0.000163	0.000246	−0.662858	0.5100
RATEFIT	−0.005437	0.004726	−1.150312	0.2547

R-squared	0.433277	Mean dependent var	10.76898
Adjusted R-squared	0.404461	S.D. dependent var	0.015025
S.E. of regression	0.011595	Akaike info criterion	−6.015126
Sum squared resid	0.007932	Schwarz criterion	−5.879054
Log likelihood	193.4765	F-statistic	15.03578
Durbin-Watson stat	0.793927	Prob（F-statistic）	0.000000

表７－４　Wu-Hausmanテスト(2)

Dependent Variable: LOANOUT
Method: Least Squares
Sample：1993：10 1998：12
Included observations：63

Variable	Coefficient	Std.Error	t-Statistic	Prob.
C	10.80245	0.006950	1554.248	0.0000
RATE	−0.009770	0.003948	−2.474648	0.0162
BONDRATE	−0.003033	0.004575	−0.662858	0.5100
RATEFIT	-7.42E-05	0.008308	−0.008934	0.9929

R-squared	0.433277	Mean dependent var	10.76898
Adjusted R-squared	0.404461	S.D. dependent var	0.015025
S.E. of regression	0.011595	Akaike info criterion	−6.015126
Sum squared resid	0.007932	Schwarz criterion	−5.879054
Log likelihood	193.4765	F-statistic	15.03578
Durbin-Watson stat	0.793927	Prob（F-statistic）	0.000000

RATEFIT

結果は表７－３、７－４に示すとおりである。いずれのケースも$a_3=0$, $b_3=0$の帰無仮説が棄却されないので、約定金利は外生変数であることが分かる。

4.2　系列相関

ラグ付き内生変数を含まない場合の２SLSにおける系列相関は、第５章で示したOLSの系列相関と基本的に同一の問題である。AR１のケースを考える。

7.10a）式で

$$e_{1t}=\rho e_{1t-1}+u_{1t} \qquad 7.16)$$

であったとする。7.10a）式を２SLSで推定して、残差を$\hat{e}_{1t}=y_{1t}-\hat{a}_1y_{2t}-\hat{a}_2x_{1t}$とし、$t\geqq 2$のケースについて

$$\rho=\Sigma\hat{e}_{1t}\hat{e}_{1t-1}/\Sigma\hat{e}^2_{1t}$$

を求める。これを利用して7.10a）式を変形し

$$y_{1t}-\rho y_{1t-1}=a_1(y_{2t}-\rho y_{2t-1})+a_2(x_{1t}-\rho x_{1t-1})+u^*_{1t}$$

$$y^*_{1t}=a_1y^*_{2t}+a_2x^*_{1t}+u^*_{1t} \qquad 7.17)$$

を得る。次にy^*_{2t}を誘導型の形でOLSで推計し、その予測値（$\hat{y}^*_{2t}$）を求める。

$$y^*_{2t}=\pi_{11}x^*_{1t}+\pi_{12}x^*_{2t}+v_t \qquad 7.18)$$

この予測値を用い

$$y^*_{1t}=a_1\hat{y}^*_{2t}+a_2x^*_{1t}+u^*_{1t} \qquad 7.19)$$

を推計すればよい。

貸出の需要供給関数は、DW統計量から系列相関が疑われる。しかし方程式を操作変数法や２段階最小二乗法で推定する場合には、DW統計量は系列相関を検定するために不適切な検定量になる。そこで一次の系列相関を仮定し、Bruesch–GodfreyのLMテストで検定する。結果は49.84（需要関数）と50.05（供給関数）となるので、明らかに両式の誤差項はそれぞれ系列相関をもつ。第５章で説明したようにモデルの特定化の誤りによって見せかけの系列相関が有り得るが、ここで誤差項が真の系列相関を持つことを仮定する。

そこで貸出の需要関数について、AR１の推計と、Newey–Westの一致性のある推計プログラムを紹介する。

’2SLSのAR１モデルの推計プログラム。操作変数は（定数項）、$BondRate_t$、IIP_t、IIP_{t-1}、約定金利前期

equation eq7_ar. tsls LOANOUT C RATE IIP AR(1) @ BONDRATE RATE(−1)

IIP IIP(－１)

'２SLSのNewey–Westの一致性のある推計プログラム。操作変数は（定数項)、IIP$_t$、約定金利当期

equation eq7_nw.tsls（n） LOANOUT C RATE IIP @ BONDRATE IIP

ここにみられるように２SLSにおけるオプションの使い方は、ほとんどOLSを推計する場合と同じである。

結果は表７－５、７－６に掲げるとおりである。表７－５にあるAR(1)のt値を見ると強い系列相関があることが分かる。また表７－１と表７－６を比較すると、Newey–Westの修正は、OLSの場合と同様に、係数の推定値をそのままにして標準誤差とt値を修正するものであることが分かる。

表７-５　２LSLのARIモデル

Dependent Variable: LOANOUT
Method: Two-Stage Least Squares
Sample (adjusted)：1993：11 1998：12
Included observations：62 after adjusting endpoints
Convergence achieved after ５ iterations
Instrument list: C IIP BONDRATE RATE（－１）IIP（－１）

Variable	Coefficient	Std.Error	t-Statistic	Prob.
C	10.78025	0.025087	429.7096	0.0000
RATE	−0.013163	0.006664	−1.975240	0.0530
IIP	0.000234	0.000164	1.4330009	0.1581
AR（１）	0.709881	0.122190	5.809628	0.0000
R-squared	0.604911	Mean dependent var		10.76943
Adjusted R-squared	0.584476	S.D. dependent var		0.014729
S.E. of regression	0.009494	Sum squared resid		0.005228
F-statistic	28.83111	Durbin-Watson stat		1.903494
Prob（F-statistic）	0.000000			
Inverted AR Roots	.71			

表７-６　２LSLのNewey-Westの一致性のある推計

Dependent Variable: LOANOUT
Method: Two-Stage Least Squares
Sample：1993：10 1998：12
Included observations：63
Newey-West HAC Standard Errors & Covariance (lag truncation＝３)
Instrument list: C IIP BONDRATE

Variable	Coefficient	Std.Error	t-Statistic	Prob.
C	10.82310	0.047296	228.8354	0.0000
RATE	-0.015207	0.005137	-2.960375	0.0044
IIP	-0.000163	0.000363	-0.448063	0.6557
R-squared	0.415061	Mean dependent var		10.76898
Adjusted R-squared	0.395563	S.D. dependent var		0.015025
S.E. of regression	0.011681	Sum squared resid		0.008187
F-statistic	19.20480	Durbin-Watson stat		0.806136
Prob（F-statistic）	0.000000			

5　連立方程式体系の推定

２SLSは同時方程式モデルを体系の中の各方程式を１本毎に推計する方法である（single equation estimator）。方程式間の誤差項の相関は必ずしも考慮されない。また方程式体系の中で、各方程式にどの外生変数があるか等の方程式毎の変数の組み合わせは考慮されていない。これが２SLSの推定量が有効性を損ねる原因の一つである。

方程式間の誤差項の相関（contemporaneous correlation between the disturbances in different equations）や各方程式の変数を考慮したシステム全体を推定する（system estimator）方法について、簡単に概要を紹介したい。

5.1　SUR

Zellnerの見かけ上無関係な方程式の推計（seemingly unrelated regressions, SUR, SURE）を考えてみる。この方法は方程式間の誤差項の相関を考慮するものである。簡単化のために次の二本からなる方程式体系を考える。

$$y_{1t}=a_1x_t+u_{1t} \qquad 7.20a)$$

$$y_{2t}=b_1z_t+u_{2t} \qquad 7.20b)$$

誤差項u_{1t}，u_{2t}は、

$$E(u_{1t})=0 \quad V(u_{1t})=\sigma^2_1$$

$$E(u_{2t})=0 \quad V(u_{2t})=\sigma^2_2$$

$$Cov(u_{1t},\ u_{2t})=E(u_{1t}u_{2t})=\sigma_{12}$$

の仮定を充たすものとする。さらにu_{1t}とu_{2t}はそれぞれ互いに相関しないと仮定する。

なお、ここで各方程式の右辺には内生変数は登場していない。そこで一見方程式相互間は無関係のように見える。7.20a）式を見ると標準的線形回帰モデルの仮定を充たすので、OLSで推定すればBLUEである。u_{1t}とu_{2t}が無相関$Cov(u_{1t},\ u_{2t})=0$であれば、7.20a）式と7.20b）を一緒に推定してもOLSより良い推定量は得られないのに対して、$\sigma_{12}\neq 0$の場合7.20a）式と7.20b）式を同時に合わせて推定する方がOLSより有効になる。

u_{1t}とu_{2t}が相関するのだろうか。たとえばシェア方程式（預金、保険、株式の資産選択、あるいは労働費用、資本費用、金融費用の費用関数等）では、

$$Cov(u_{1t},\ u_{2t})\neq 0$$

という状態が生じる[5)]。SURでは7.20a）式と7.20b）式のサンプルが同一であるとする（時系列データであれば対象期間が同一。クロスセクションデータであれば同一経済主体とする）。

仮に預金（y_1）と保険（y_2）の選択で、預金金利（x）と保険配当（z）が説明変数であるような下記のデータセットがあったとしよう。

サンプル	1	2	3	4	5
預金シェア(y_1)	0.5	0.7	0.4	0.6	0.3
保険シェア(y_2)	0.4	0.1	0.3	0.15	0.6
預金金利(x)	0.1	0.08	0.07	0.09	0.11
保険配当(z)	0.09	0.1	0.06	0.07	0.05
誤差項(u_1)	u_{11}	u_{12}	u_{13t}	u_{14}	u_{15}
誤差項(u_2)	u_{21}	u_{22}	u_{23}	u_{24}	u_{25}

7.20a）式と7.20b）式のデータ（仮にサンプルが５個だとする）を次のように人為的に統合する。

サンプル	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y^*	0.5	0.7	0.4	0.6	0.3	0.4	0.1	0.3	0.15	0.6
x^*	0.1	0.08	0.07	0.09	0.11	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
z^*	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.09	0.1	0.06	0.07	0.05
u^*	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	u_{21}	u_{22}	u_{23}	u_{24}	u_{25}

すなわち

$$y^*_n=y_{1n} \quad n=1,\cdots,5 \qquad x^*_n=x_n \quad n=1,\cdots,5$$

$$\quad =y_{2n-5} \quad n=6,\cdots,10 \qquad\quad =0 \quad n=6,\cdots,10$$

$$z^*_n=0 \quad n=1,\cdots,5 \qquad u^*_n=u_{1n} \quad n=1,\cdots,5$$

5) シェアの合計は定義により100%である。

$= z_{n-5}\quad n=6,\cdots,10 \qquad = u_{2n-5}\quad n=6,\cdots,10$

を考える。その上で7.20a）式と7.20b）式を下記のように表現する。

$$y^*_t = ax^*_t + bz^*_t + u^*_t \qquad 7.25)$$

7.25）式の誤差項の性質を調べよう。u_{1t}, u_{2t}の仮定より

$$E(u^*_t) = 0$$

$$V(u^*_t) = \sigma^2_1 \quad t=1,\cdots,5$$

$$\qquad = \sigma^2_2 \quad t=6,\cdots,10$$

$$E(u^*_t u^*_s) = \sigma_{12} \quad s=t+5$$

$$\qquad = 0 \quad \text{その他}$$

7.25）式の誤差項は分散不均一性とある種の系列相関をもっていることが分かる。

その分散不均一性と系列相関を考慮するために7.25）式に一般化最小二乗法（GLS）を適用する。この場合GLSはSUR又はSURE推定と呼ばれている。

SURによるパラメータは以下で求められる[6)]。

$$\hat{a} = \frac{(\sigma^2_2 \Sigma x_t y_{1t} - \sigma_{12} \Sigma x_t y_{2t})\sigma^2_1 \Sigma z^2_t + (\sigma^2_1 \Sigma z_t y_{2t} - \sigma_{12} \Sigma z_t y_{1t})\sigma_{12} \Sigma x_t z_t}{\sigma^2_1 \sigma^2_2 \Sigma x^2_t \Sigma z^2_t - \sigma^2_{12}(\Sigma x_t z_t)^2} \qquad 7.26)$$

$$\hat{b} = \frac{(\sigma^2_2 \Sigma x_t y_{1t} - \sigma_{12} \Sigma x_t y_{2t})\sigma_{12} \Sigma x_t z_t + (\sigma^2_1 \Sigma z_t y_{2t} - \sigma_{12} \Sigma z_t y_{1t})\sigma^2_2 \Sigma z^2_t}{\sigma^2_1 \sigma^2_2 \Sigma x^2_t \Sigma z^2_t - \sigma^2_{12}(\Sigma x_t z_t)^2} \qquad 7.27)$$

7.26）式と7.27）式には未知の係数（σ^2_1, σ^2_2, σ^2_{12}）が含まれているので、aとbをSURで推定する前にこの係数を推定する必要がある。7.20a）式と7.20b）式をOLSで推定し、それぞれの残差を$\hat{u}_{1t}$と$\hat{u}_{2t}$とする。この三つの未知の係数を次のように推定する。

$$\sigma^2_1 = \frac{\Sigma\, \hat{u}^2_{1t}}{n-1} \quad \sigma^2_2 = \frac{\Sigma\, \hat{u}^2_{2t}}{n-1} \quad \sigma_{12} = \frac{\Sigma\, \hat{u}_{1t} \hat{u}_{2t}}{(n-1)}$$

ここでnは7.20a）、7.20b）式のサンプル数である。

7.26）式には7.27）式の説明変数であるzが含まれている。7.27）式には7.26）式の説明変数であるxが含まれている。このためにある方程式の定式化が誤っていれば、その誤りは他の方程式にも波及しシステム全体にバイアスが生じることになる。

（SURの特殊なケース）

u_1とu_2が無相関（$\sigma_{12}=0$）であれば、7.26)、7.27）式からσ_{12}を消去すると

$$\hat{a} = \frac{(\sigma^2_2 \Sigma x_t y_{1t})\sigma^2_1 \Sigma z^2_t}{\sigma^2_1 \sigma^2_2 \Sigma x^2_t \Sigma z^2_t} = \frac{\Sigma x_t y_{1t}}{\Sigma x^2_t} \qquad 7.26)'$$

$$\hat{b} = \frac{(\sigma^2_1 \Sigma z_t y_{2t})\sigma^2_2 \Sigma x^2_t}{\sigma^2_1 \sigma^2_2 \Sigma x^2_t \Sigma z^2_t} = \frac{\Sigma z_t y_{2t}}{\Sigma z^2_t} \qquad 7.27)'$$

となるので、SURは7.20a)、7.20b）式のOLSの推計に帰着する[7)]。

また説明変数が方程式間で同一、すなわち$x_t = z_t$であるときは、7.26a）式の分子を書き直すと

$$(\sigma^2_2 \Sigma x_t y_{1t} - \sigma_{12} \Sigma x_t y_{2t})\sigma^2_1 \Sigma x^2_t$$

$$+(\sigma^2_1 \Sigma x_t y_{2t} - \sigma_{12} \Sigma x_t y_{1t})\sigma_{12} \Sigma x^2_t$$

$$=(\sigma^2_1 \sigma^2_2 \Sigma x^2_t \Sigma x_t y_{1t} - \sigma^2_{12} \Sigma x^2_t \Sigma x_t y_{1t})$$

$$+(\sigma^2_1 \sigma_{12} \Sigma x_t y_{2t} \Sigma x^2_t - \sigma^2_1 \sigma_{12} \Sigma x_t y_{2t} \Sigma x^2_t)$$

$$=(\sigma^2_1 \sigma^2_2 \Sigma x^2_t - \sigma^2_{12} \Sigma x^2_t) \Sigma x_t y_{1t}$$

となる。他方で分母は

$$\sigma^2_1 \sigma^2_2 \Sigma x^2_t \Sigma x^2_t - \sigma^2_{12}(\Sigma x^2_t)^2$$

$$=(\sigma^2_1 \sigma^2_2 \Sigma x^2_t - \sigma^2_{12} \Sigma x^2_t) \Sigma x^2_t$$

となる。これから

$$\hat{a} = \frac{\Sigma x_t y_{1t}}{\Sigma x^2_t} \qquad 7.26)''$$

となる。同様に7.27）式の分子を書き直すと

$$(\sigma^2_1 \sigma^2_2 \Sigma z^2_t \Sigma z_t y_{2t} - \sigma^2_{12} \Sigma z^2_t \Sigma z_t y_{2t})$$

$$+(\sigma^2_2 \sigma_{12} \Sigma z_t y_{1t} \Sigma z^2_t - \sigma^2_2 \sigma_{12} \Sigma z_t y_{1t} \Sigma z^2_t)$$

$$=(\sigma^2_1 \sigma^2_2 \Sigma z^2_t - \sigma^2_{12} \Sigma z^2_t) \Sigma z_t y_{2t}$$

6) 導出の詳細はGreene［1997］のCh15-4を参照されたい。

7) 7.20a）式と7.20b）式には定数項がないことに注意して下さい。

となる。分母は

$$\sigma^2_1\sigma^2_2\Sigma z^2_t\Sigma z^2_t - \sigma^2_{12}(\Sigma z^2_t)^2$$

$$=(\sigma^2_1\sigma^2_2\Sigma z^2_t - \sigma^2_{12}\Sigma z^2_t)\Sigma z^2_t$$

である。これから

$$\hat{b}=\frac{\Sigma z_t y_{2t}}{\Sigma z^2_1} \qquad 7.27)''$$

となる。方程式間で説明変数が同一の場合も、SURの推計値はOLSに帰着する。

（EviewsによるSURの推計例）

上の例を我が国企業の財務データを使ってEviewsでみてみる[8)]。90～97年度の上場企業（金融保険、証券を除く）をデータセットは含んでいる。業種が千差万別であるので、簡単な費用関数についてみることにしたい（シェア関数を取り上げることにする)。簡単化のために費用は人件費、減価償却費と利払いだけだとする。要素価格は、人件費・福利厚生費／従業員数、減価償却費／有形固定資産、利払い費／負債残高だとしよう。

workfile c:￥data\zaimu u 1 22373

smpl 1 22373

'企業名　年度　従業員数（labor）有形固定資産（b20）　短期借入（b42）

'１年内長期（b43）　１年内社債（b44）社債（b56）　長期借入（b57）長期手形（b58）

'売上げ（p１）　利払い（p13）　人件費（a17）減価償却（p44）を読み込む。

read c:￥data\kaisha1.dat code year labor b20 b42 b43 b44 b56 b57 b58 p１ p13 a17 p44

'関係データが欠値のサンプルを除く。対象を1997年度に限定する。

smpl if b20＞０ and a17＞０ and p44＞０ and labor＞０ and year＝1997

'マイナスのデータを０に置き換える

series p13＝０*(p13<0)＋p13*(p13>＝0)[9)]

series p44＝０*(p44<0)＋p44*(p44>＝0)

series b42＝0*(b42<0)＋b42*(b42>＝0)

series b43＝0*(b43<0)＋b43*(b43>＝0)

series b44＝0*(b44<0)＋b44*(b44>＝0)

series b56＝0*(b56<0)＋b56*(b56>＝0)

series b57＝0*(b57<0)＋b57*(b57>＝0)

series b58＝0*(b58<0)＋b58*(b58>＝0)

series a17＝0*(a17<0)＋a17*(a17>＝0)

series b20＝0*(b20<0)＋b20*(b20>＝0)

'負債

series debt＝b42＋b43＋b44＋b56＋b57＋b58

'費用＝利払い＋人件費＋減価償却費

series cost＝p13＋a17＋p44

'資本費単価＝減価償却費／有形固定資産

series Kapital＝p44/b20

'人件費単価＝人件費／人員

series Jinkenhi＝a17/labor

'金融費用単価＝負債／利払い

series ribarai＝p13/debt

'欠値（負債のない企業）を０に置き換える[10)]

series ribarai＝@nan (ribarai, ０)

'相対価格

series JK＝log (jinkenhi/kapital)

series RK＝Log (Ribarai/kapital)

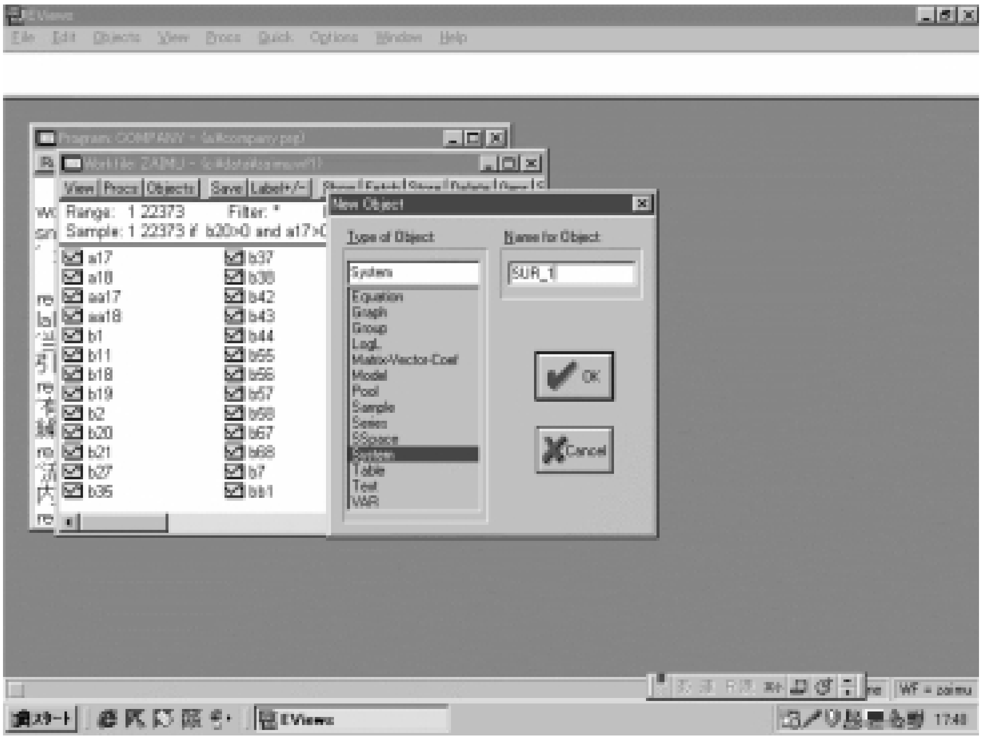
---

8) 企業財務データは鈴木誠（大和総研）氏と松浦によって作成された。鈴木氏に謝意を表します。

9) 第３章で説明したようにp13<０という論理演算を使うと、結果は条件を充たした場合１となり、充たしていない場合０となる。
series p13＝０*(p13<０)＋p13*(p13>＝０)
という命令を実施するとp13が下記のように計算される。
p13＝p13　if p13≧０
　＝0　if p13<０

10) 無借金企業では負債も利払いもない。そのために変数ribaraiは計算されずに欠値となる。そこで無借金企業についてはribaraiはゼロと置き換える必要がある。この例にあるように欠値は
series変数名＝@nan（変数名、０）
とすることで、実数が入っているものはそれをそのまま使い、欠値のものは０とすることができる。

図１　Objects/New Object/Systemの画面



'欠値（利払い、負債のない企業）を０に置き換える[11)]

series RK＝@nan（RK，０）

'固定資本費用、労働費用、金融費用のシェア

series skapital＝p44/cost

series slabor＝a17/cost

series skinyu＝p13/cost

以上で必要な変数の作成が行われた。具体的な推計に移ろう。

Eviewsは連立方程式全体を同時に推計するときは、メニュー形式でダイアログに変数を入れる形で行う。ツールバーの

Objects/New Object/System

を選択する。次のような画面がでる（図１参照）。そこでは

Type of Object

と種類を聞いてくる。ここではSystemを選択する。

その名前を

Name for Object

と聞いてくる。ここではSUR_１と名付けている。実行すると

System Estimation

の画面がでてくる（図２参照）。各種の推定方法（Estimation Method）を聞いてくる。ここでは

Seemingly Unrelated Regression

を選択する（**Iteration Control**で計算方法のオプションが選択できる）。

実行すると、推計式を書き込む画面がでてくる。

$$SLABOR_i = c1 + c2\,Log(jinkenhi/kapital)_i + c3\,Log(ribarai/kapital)_i + e_{1i}$$

$$SKINYU_i = c4 + c5\,Log(jinkenhi/kapital)_i + c6\,Log(ribarai/kapital)_i + e_{2i}$$

を推計したいので、

11)　Log(０)は計算不可能なので、欠値となる。これを０と置き換えている。

図２　SURの選択

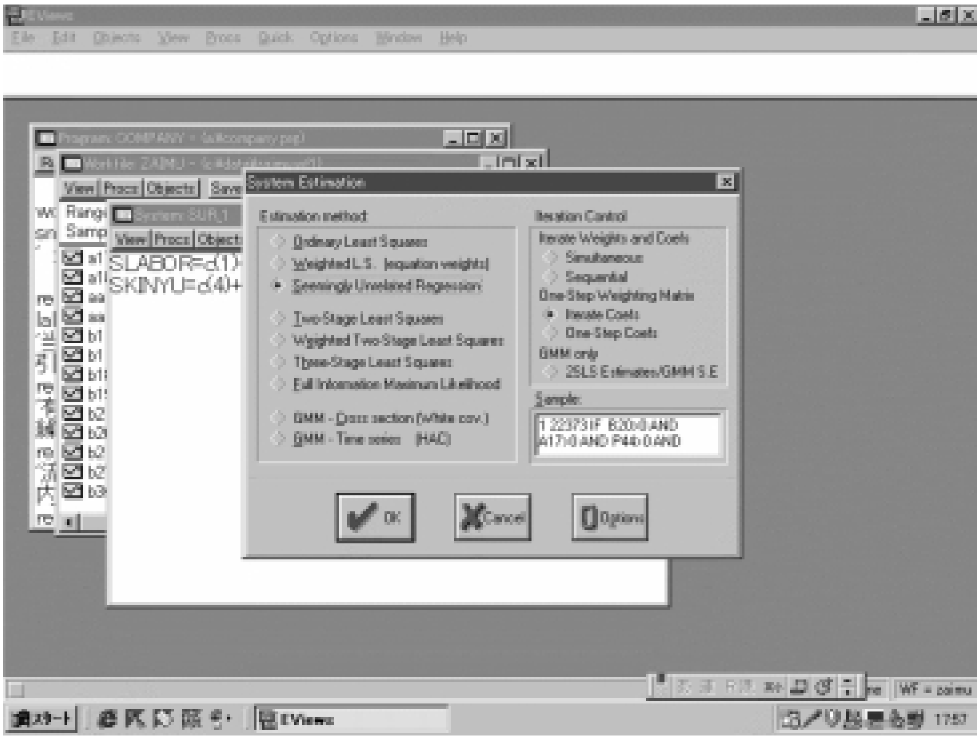


図３　方程式の入力例

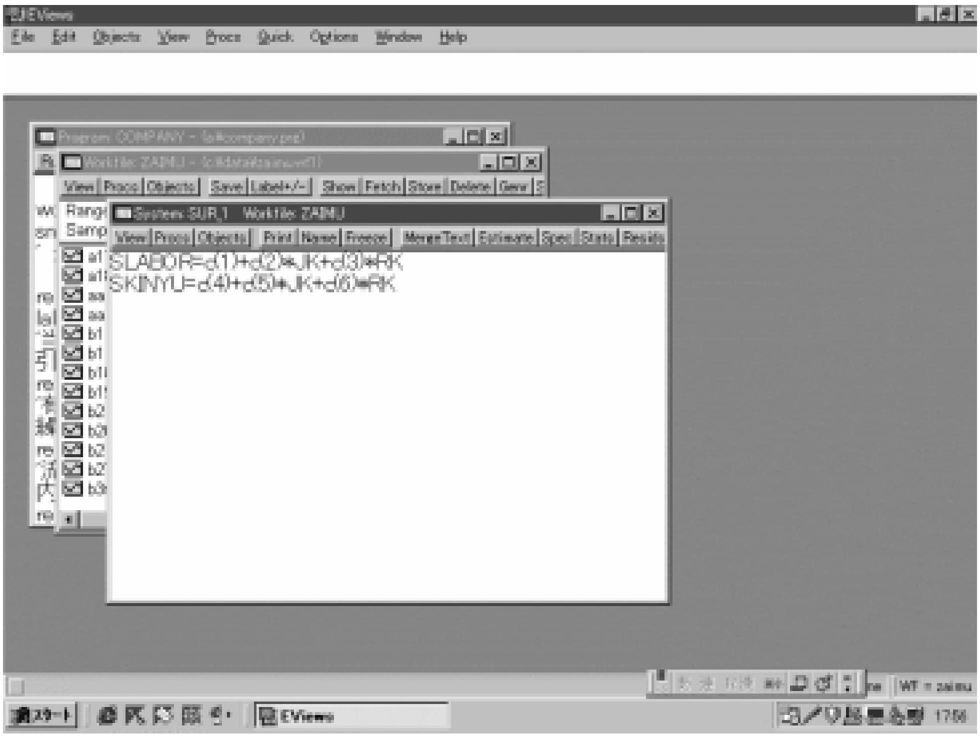
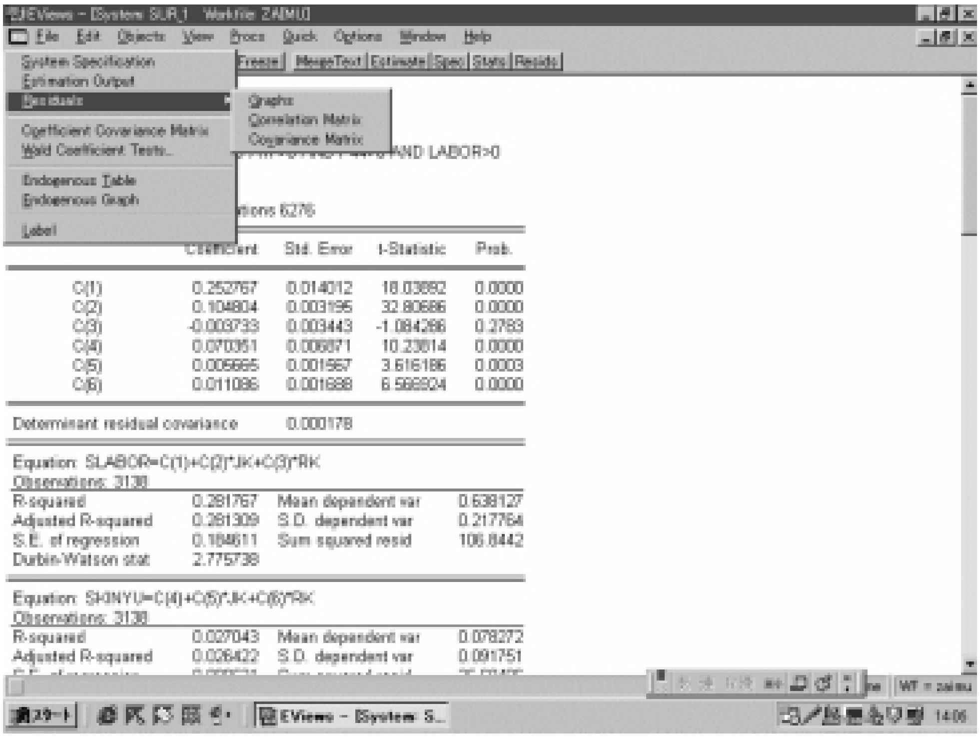


図４　System推計のViewの画面



SLABOR＝c(１)＋c(２)*JK＋c(３)RK

SKINYU＝c(４)＋c(５)*JK＋c(６)*RK

と書き込む（図３参照。なお上欄に方程式名のSUR_１が表示されている）[12]。

結果は表７－７に掲げるとおりである。

最初の欄のTotal system (balanced) observationsは各方程式でサンプルが揃っているかどうかを示すものである。

次に各パラメータの推計結果が表示される[13]。

その後に方程式毎の決定係数や標準誤差などが表示されている。

Viewを選択すると残差の相関、共分散行列、係数の分散共分散行列をみることができる（図４参照）。

ここでは対称性の制約が充たされているかどうかをWald検定でみてみよう。

Wald Coefficient Testsを選択し

C(２)＝C(６)，　C(３)＝C(５)

と入力する。結果は表７－８に掲げるとおりである。帰無仮説は強く棄却され対称性の制約はここでは成立していない[14]。

仮に制約が成立しているケースであれば、次のような形で制約をかけて、推計することができる。

SLABOR＝c(１)＋c(２)*JK＋c(３)RK

SKINYU＝c(４)＋c(３)*JK＋c(２)*RK

制約が正しいとすると、この場合両式の説明変数が同じにもかかわらず、システムをSURで推定する方が各式をOLSで推定することより良い。な

---

12) 両式の説明変数が全く同じなので、このシステムをSURで推定することとOLSで推定することは同じことであることに注意する。しかし両式にある係数に関する制約を検定するためには、SURで推定する方が妥当である。

13) Determinant residual covarianceは方程式間の分散共分散行列の値である。

14) 費用関数の推計で、アプリオリに対称性の制約や一次同次の制約が課されることがある。これらの制約が成立している保障は必ずしも無い（各期毎に瞬時に均衡が成立しないケースを思い出してほしい）。Wald検定で制約が成立していることを確認した上で、制約をかけた推計を行うことが望ましい。

表７−７　SURの推計例

System: SUR−１
Estimation Method: Full Information Maximum Likelihood （Marquardt）
Sample：７ 22373 IF B20＞０ AND A17＞０ AND P44＞０ AND LABOR＞０
AND YEAR＝1997
Included observations：3138
Total system（balanced）observations 6276
Convergence achieved after １ iterations

	Coefficient	Std.Error	t-Statistic	Prob.
C(１)	0.252767	0.014174	17.83377	0.0000
C(２)	0.104804	0.003537	29.62680	0.0000
C(３)	−0.003733	0.003143	−1.187645	0.2350
C(４)	0.070351	0.007271	9.675538	0.0000
C(５)	0.005665	0.001591	3.561733	0.0004
C(６)	0.011086	0.001869	5.932865	0.0000
Log Likelihood		4638.303		
Determinant residual covariance		0.000178		

Equation: SLABOR＝C(１)＋C(２)*JK＋C(３)*RK
Observations：3138

R-squared	0.281767	Mean dependent var	0.638127
Adjusted R-squared	0.281309	S.D. dependent var	0.217764
S.E. of regression	0.184611	Sum squared resid	106.8442
Durbin-Watson stat	2.775738		

Equation: SKINYU＝C(４)＋C(５)*JK＋C(６)*RK
Observations：3138

R-squared	0.027043	Mean dependent var	0.078272
Adjusted R-squared	0.026422	S.D. dependent var	0.091751
S.E. of regression	0.090531	Sum squared resid	25.69406
Durbin-Watson stat	3.370019		

表７−８　WALDテスト

Wald Test
System: SUR−１

Null Hypothesis: C(２)＝C(６)
C(３)＝C(５)

Chi-square	867.0524	Probability	0.000000

ぜならば、正しい制約を使用することによって推定量の分散が小さくなるからである。

5.2　三段階最小自乗法

SUR推定を説明した際、説明変数と誤差項は相関しないと仮定した。しかしその仮定が充たされていない時は、SURは一致推定量にならない。システムを体系として推定する（system method of estimation）方法の中で、方程式間の誤差項の相関と、説明変数と誤差項との相関を考慮するものに三段階最小自乗法（three-stage least square, ３SLS）がある。

$$y_{1t}=a_1y_{2t}+u_{1t} \qquad 7.28a)$$

$$y_{2t}=b_1z_t+u_{2t} \qquad 7.28b)$$

をここで考える[15]。7.20a）式と7.20b）式と比較すると、7.20a）式にある外生変数の代わりにy_{2t}を入れたものが7.28a）式である。３SLSの推計は以下の手順による。

① モデルの中のy_{1t}とy_{2t}について誘導系を推計する。y_{1t}とy_{2t}の予測値（$\hat{y}_{1t}$と$\hat{y}_{2t}$）を作成する。

② 二段階最小二乗法で推計し、各方程式間の残差の分散共分散を求める[16]。

③ ②で求めた分散共分散を利用して、内生変数である説明変数の代わりに予測値を代入した各方程式を同時に推計する[17]。

この２SLSで求められた分散共分散をs^2_1、s^2_2、s_{12}と書き、7.26a）式と7.26b）式にあるx_t、σ^2_1、σ^2_2、σ^2_{12}の代わりにそれぞれ$\hat{y}_{2t}$、s^2_1、s^2_2、s_{12}を代入すると、7.28a）式と7.28b）式の３SLSのパラメータは以下で求められる[18]。

$$\hat{a}=\frac{(s^2_2\Sigma\hat{y}_{2t}y_{1t}-s_{12}\Sigma\hat{y}_{2t}y_{2t})s^2_1\Sigma z^2_t+(s^2_1\Sigma z_ty_{2t}-s_{12}\Sigma z_ty_{12t})s_{12}\Sigma\hat{y}_{2t}z_t}{s^2_1s^2_2\Sigma\hat{y}^2_{2t}\Sigma z^2_t-s^2_{12}(\Sigma\hat{y}_{2t}z_t)^2} \quad 7.29)$$

$$\hat{b}=\frac{(s^2_2\Sigma\hat{y}_{2t}y_{1t}-s_{12}\Sigma\hat{y}_{2t}y_{2t})s_{12}\Sigma\hat{y}_{2t}z_t+(s^2_1\Sigma z_ty_{2t}-s_{12}\Sigma z_ty_{1t})s^2_2\Sigma z^2_t}{s^2_1s^2_2\Sigma y^2_{2t}\Sigma z^2_t-s^2_{12}(\Sigma\hat{y}_{2t}z_t)^2} \quad 7.30)$$

SURのアナロジーで明らかなように、方程式間の誤差項に相関がなければ、３SLSの推定は２SLSの推計に帰着する。またシステムの中の各方程式が全て丁度識別であればやはり２SLSの推計に帰着する。

（OLSと２SLS,2SLSと３SLSの選択）

OLSと２SLSの間の選択基準として外生検定のWu－Hausmanテストを紹介したが、２SLSと３SLSの選択も一つの課題である。３SLSは各方程式が正しく定式化されていれば、その推定量の分散は２SLSよりも小さく有効である。反面システムの中の一本の方程式の定式化に過ちがあれば、その誤りが波及して、システム全体の推計もおかしくなる。これに対し２SLSは有効性は劣るが、仮に一本の方程式の定式化に誤りがあっても、それが他の方程式に影響することはない。このように両者には一長一短がある。

OLSと２SLSの選択に関するもう一つのHausmanテストを紹介する。２SLSと３SLSの選択もこのテストの延長だからである。

$$y_t=ax_t+e_t \quad 7.31)$$

を考える。x_tがe_tと相関しない、すなわち$Cov(x_t, e_t)=E(x_te_t)=0$、であれば7.31）式はOLSでBLUEとなる。$x_t$が$e_t$と相関を有し、$Cov(x_t, e_t)=E(x_te_t)\neq 0$、であればバイアスが生じる。

H_0: $E(x_te_t)=0$

の下での推定量を$\hat{\alpha}_0$とし、対立仮説

H_1: $E(x_te_t)\neq 0$

の下での推定量を$\hat{\alpha}_1$とする。

$\hat{\alpha}_0$は帰無仮説の下で一致性は有するが対立仮説の下では一致性は有しない。$\hat{\alpha}_1$は帰無仮説、対立仮説の下で一致性は有するが、帰無仮説の下で有効性はない。したがって両者の差を考えると、帰無仮説と対立仮説の下では、両者の差

$\hat{q}=\hat{\alpha}_0-\hat{\alpha}_1$は確率極限において

$$H_0: q=\alpha_0-\alpha_1=0 \quad 7.32)$$

$$H_1: q=\alpha_0-\alpha_1\neq 0 \quad 7.32)'$$

となる。Hausmanは次の検定統計量を提示した。まず$\hat{q}$の分散$V(\hat{q})=V(\hat{\alpha}_1)-V(\hat{\alpha}_0)$を考え、

15) このシステムでは両式は丁度識別されているので、３LSLと２SLSとは同じになる。この例は３SLSのプロセスを説明するために利用している。

16) 方程式間の分散共分散を求める関係で、分散がゼロとなる定義式は予め解いて、モデルの体系に代入する必要がある。

17) SURでは誘導系を推定する必要がなく、最初のOLS推計の分散共分散を利用していた。③では内生変数がないので方程式をそのままに推定する。この二つの点が３SLSとの違いである。

18) 導出はStewart ［1991］のCh８－４を参照。

$$m=\frac{\hat{q}^2}{V(\hat{q})} \qquad 7.33)$$

を求める。この7.33）式が帰無仮説の下で自由度１のχ^2分布にしたがう（ここではパラメータの数が１個である。パラメータの数がk個であれば、自由度はkである）[19)20)]。

２SLSと３SLSの選択もこの7.33）式と同様である。

$\hat{a}_{2s}$を２SLSの推定量、$\hat{a}_{3s}$を３SLSの推定量とする。その分散を$V(\hat{a}_{2s})$、$V(\hat{a}_{3s})$とする。ここでも$\hat{q}=\hat{a}_{2s}-\hat{a}_{3s}$, $V(\hat{q})=V(\hat{a}_{2s})-V(\hat{a}_{3s})$とする。

$$m=\frac{\hat{q}^2}{V(\hat{q})} \qquad 7.34)$$

で求められる[21)]。システムの特定化がすべて正しいとすると、２SLSと３SLSは一致性を持つ。しかし検定している方程式以外の方程式の特定化が間違っているのであれば（例えば、重要な説明変数が除外された）、検定している方程式の２SLSは一致性を持つに対して３SLSは一致性を持たない。Wu－Hausmanテストはシステムの特定化のテストとして解釈ができる。

（Eviewsでの３SLSの推計例）

銀行貸出の需要供給関数を次のように変形してみよう。

$$\begin{aligned}\mathrm{Log}(\mathrm{Loan}_t/\mathrm{wpi}_t)=&a_0+a_1\mathrm{Rate}_t+a_2\mathrm{IIP}_t\\&+a_3\mathrm{Log}(\mathrm{Consump}_t/\mathrm{cpi}_t)\\&+e_{1t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Log}(\mathrm{Loan}_t/\mathrm{wpi}_t)=&b_0+b_1\mathrm{Rate}_t+b_2\mathrm{BondRate}_t\\&+b_3(\mathrm{Deposit}_t/\mathrm{wpi}_t)+e_{2t}\end{aligned}$$

需要には家計部門の行動も影響すると考える（家計の実質消費、家計調査による。Log(Con-sump$_t$/cpi$_t$）として表現する)。供給には銀行の資金量（実質預金＋債券＋信託元本、Deposit$_t$/

---

19) 分散の定義から$V(\hat{q})$を計算すると$V(\hat{q})=V(\hat{a}_1)+V(\hat{a}_0)-2\mathrm{Cov}(\hat{a}_1,\ \hat{a}_0)$となるが、$\hat{a}_0$は有効推定量なので

$V(\hat{q})=V(\hat{a}_1)-V(\hat{a}_0)$

となることを、下記のように証明することができる。そのためには$\mathrm{Cov}(\hat{a}_0,\ \hat{q})=0$である必要がある。これは以下のように求められる。

$\dot{a}=\hat{a}_0+\lambda\hat{q}$

ここでλは任意の定数。帰無仮説の下では

$\mathrm{plim}\dot{a}=\mathrm{plim}\,\hat{a}$ for any λ

である。$\dot{a}$の分散は次の通りである。

$V(\dot{a})=V(\hat{a}_0)+\lambda^2V(\hat{q})+2\lambda\mathrm{Cov}(\hat{a}_0,\ \hat{q})$

仮定により$\hat{a}_0$は有効推定量であるから、$V(\dot{a})\geqq V(\hat{a}_0)$である。したがって

$\lambda^2(\hat{q})+2\lambda\mathrm{Cov}(\hat{a}_0,\ \hat{q})\geqq 0$ for any λ

である。仮に$\mathrm{Cov}(\hat{a}_0,\ \hat{q})\neq 0$であれば、$\lambda=-\mathrm{Cov}(\hat{a}_0,\ \hat{q})/V(\hat{q})$である。$\mathrm{Cov}(\hat{a}_0,\ \hat{q})>0$のときλは負である。これは上式を充たさない。$\mathrm{Cov}(\hat{a}_0,\ \hat{q})<0$のときλは正である。これも上式を充たさない。したがって$\mathrm{Cov}(\hat{a}_0,\ \hat{q})=0$以外にありえない。

$\hat{q}=\hat{a}_1-\hat{a}_0$を書き直すと$\hat{a}_1=\hat{q}+\hat{a}_0$である。分散は

$V(\hat{a}_1)=v(\hat{q})+V(\hat{a}_0)+2\mathrm{Cov}(\hat{q},\ \hat{a}_0)=V(\hat{q})+V(\hat{a}_0)$となる。したがって$V(\hat{q})=V(\hat{a}_1)-V(\hat{a}_0)$である。

20) 7.32）式の検定はWu-Hausmanテスト同値である（Baltagi［1998a］のCh11-６参照)。

21) 下記のシステムのWu-Hausmanテストを別の形で紹介する。

$y_{1t}=a_1y_{2t}+a_2x_{1t}+a_3x_{2t}+e_{1t} \qquad 1s)$

$y_{2t}=b_1y_{1t}+b_2x_{3t}+e_{2t} \qquad 2s)$

y_{1t}とy_{2t}について誘導系を推計し、y_{1t}とy_{2t}の予測値（$\hat{y}_{1t}$と$\hat{y}_{2t}$）と２s）式の２SLS残差（$\hat{e}_{2t}$）を作成する。１s）式の２SLSと３SLSの推定量を使用し、Wu-Hausmanテストを行う。

$\hat{e}_{2t}=\pi_1\hat{y}_{1t}+\pi_2\hat{y}_{2t}+\pi_3x_{1t}+\pi_4x_{2t}+\pi_5x_{3t}+$残差 $\qquad 3s)$

をOLSで推計し、その決定係数をR^2とする。サンプル数をnとする。$m=nR^2$の統計量が自由度３(ls）式にある係数の数）のχ^2分布にしたがうとBaltagi ［1998b］は提案している。しかし$\hat{y}_{1t}$, $\hat{y}_{2t}$はx_{1t}, x_{2t}とx_{3t}の線形関数として計算されるので３s）式をそのまま推計すると完全な多重共線関係が起る。それを回避するために３s）式の代わりに

$\hat{e}_{2t}=\pi_1\hat{y}_{1t}+\pi_3x_{1t}+\pi_5x_{3t}+$残差 $\qquad 4s)$

をOLSで推計し、その決定係数をR^2とする。$m=nR^2$の統計量が自由度１（４s）にある係数の数-２s）式にある係数の数）のχ^2分布にしたがう。これを用いることができる。このケースでは１s）式が丁度識別され、２s）式が過剰識別されているので２s）式の３SLSと２SLSは同値となる（Baltagi［1998b］参照）ので、２s）式にWu-Hausmanテストを適用することはできない。

wpi_tとして表現する）が影響するものとしよう（この需要供給関数はいずれも過剰識別となっている）。EVIEWSのプログラムではLog（$Consump_t$/cpi_t）と（$Deposit_t$/wpi_t）はそれぞれCONSUMPとDEPOSITとして表記する。操作変数は全ての外生変数とIIPの１期ラグを考える。

推計の手順はSURの場合と同一である。ツールバーの

Objects/New Object/System

を選択する。そこでは

Type of Object

と種類を聞いてくる。ここでも**System**を選択する。

その名前を

Name for Object

と聞いてくる。ここでは**THR**と名付ける。実行するとやはり

System Estimation

の画面がでてくる。推定方法（Estimation Method）をここでは

Three Stage Least Squares

を選択し，実行する。推計式を書き込む画面に

LOANOUT＝c（１）＋c（２）*RATE＋c（３）*IIP＋c（４）*CONSUMP　@　IIP IIP（−1）BONDRATE DEPOSIT CONSUMP

表７−９　３LSLの推計例

System: THR
Estimation Method: Three-Stage Least Squares
Sample：1993：10 1998：12
Included observations：　63
Total system（balanced）observations 126

	Coefficient	Std.Error	t-Statistic	Prob.
C（１）	10.44781	0.107666	97.03877	0.0000
C（２）	−0.017696	0.002159	−8.197708	0.0000
C（３）	−0.000421	0.000223	−1.885177	0.0619
C（４）	0.049928	0.013519	3.693296	0.0003
C（５）	0.804806	1.826831	0.440548	0.6603
C（６）	0.025677	0.008818	2.911963	0.0043
C（７）	−0.013453	0.003787	−3.552562	0.0005
C（８）	0.898124	0.164013	5.475919	0.0000
Determinant residual covariance		1.00E-08		

Equation: LOANOUT＝C（１）＋C（２）*YAKUKEI＋C（３）*IIP＋C（４）*SHOUHI
Observations：63

R-squared	0.503244	Mean dependent var	10.76898
Adjusted R-squared	0.477986	S.D. dependent var	0.015025
S.E. of regression	0.010856	Sum squared resid	0.006953
Durbin-Watson stat	0.697341		

Equation: LOANOUT＝C（５）＋C（６）*YAKUKEI＋C（７）*BONDRATE＋C（８）*SIKIN
Observations：63

R-squared	0.580018	Mean dependent var	10.76898
Adjusted R-squared	0.558663	S.D. dependent var	0.015025
S.E. of regression	0.009981	Sum squared resid	0.005878
Durbin-Watson stat	0.662050		

LOANOUT＝c(5)＋c(6)*RATE＋c(7)* BONDRATE＋c(8)*＊DEPOSIT @ IIP IIP(−1) BONDRATE DEPOSIT CONSUMP

と書き込む。

結果は表7−9に示すとおりである[22)]。需要関数ではa_1＜0で1％水準で有意に符号条件を満たしている。供給関数でもb_1＞0で1％水準で有意に符号条件を満たしている。

参考文献

2SLSについては

山本拓［1995］『計量経済学』の11章、

Maddala. G.［1992］*Introductory to Econometrics,* Ch9–6が分かりやすい。

連立方程式の考え方については

Pindyck, R. and D. Rubinfeld［1991］*Econometric Models and Economic Forecast*, 3rd edition, のCh11

Mukherjee, C., H. White and M. Wuyts［1998］ *Econometrics and Data Analysis for Developing Countries*, RoutledgeのCh13、Ch14が分かりやすい。

SUR、3SLSの詳しい導出については

Stewart, J［1991］*Econometrics,* Philip Allan, Ch5–5, Ch9–4

Greene, W.［1997］*Econometric Analysis*, 3rd edition, Ch16

Baltagi, B.［1998a］*Econometrics,* Springer；Ch10, Ch11

Baltagi, B.［1998b］*Econometrics, Solutions Manual, Springer*；Ch10, Ch11

を参照。

22) 結果の表には使用した操作変数が記載されていない。この場合でも用いた操作変数名を論文では報告する必要がある。