シリーズ

応用計量経済学(8)

横浜市立大学商学部　松浦　克己
大阪大学国際公共政策研究科　Colin McKenzie

第８章　単位根と共和分

株価の将来は予測することはできない、あるいは市場のことは市場に聞けといわれることがある。我々はある変数（たとえば株価）のデータから、その株価の将来を読みとれないということがあるのだろうか。

GDPや消費、鉱工業生産等のマクロ時系列データは、上昇トレンドを持つものが多い。そうであれば時間と共に平均は増加し、分散も大きくなることが予想される。このトレンドはデータの性質に何らかの影響を及ぼすことはないのだろうか。

さらに、将来を全く読みとれないような変数を（被説明変数や説明変数として）用いて回帰分析をしても、意味のある結果は得られそうにないであろう。またトレンドを持つような変数をそのまま利用しても、そのトレンドの影響により推計にはバイアスが生じるかもしれない。

このような時系列データの性質に関する問題を本章では、データの定常性（stationarity）、その検定方法である単位根検定（unit root test）、変数間の関係を検定する共和分テスト（cointegration test）の観点から取り上げる。

1　データの定常性

我々が観察している時系列データは、ある確率過程（stochastic process）からの実現値である。その確率変数をy_tとしよう（添字tはある時点を表すものである）。

その確率変数が次の条件を満足するとき、

$$E(y_t)=\mu \quad \text{for all } t \qquad 8.1)$$

$$V(y_t)=\sigma^2 \quad \text{for all } t \qquad 8.2)$$

$$Cov(y_t,\ y_{t-k})=\gamma_k \quad k=\cdots,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\cdots \qquad 8.3)$$

そのデータは定常性を充たす、あるいは弱定常過程（weakly stationary stochastic process）であるという。すなわち期待値（平均）と分散は時間を通じて一定であり、かつ自己共分散（auto–covariance）は時点の２時点の差kのみに依存し、時点tには依存しない。これらの条件を満たすときデータは定常である[1)2)]。8.1）～8.3）式のいずれかの条件を満たさないとき、そのデータは非定常（non–stationary）であるという。この時系列データの分析では、第５章で取り上げたように標本自己相関（AC、コレログラム）や標本偏自己

1) 8.1）～8.3）式の値は有限であることも仮定されている。本章では確率過程のy_tと標本からの実現値y_tとを特に区別しないが、誤解は生じないと思う。

2) 8.1）～8.3）式の条件に加えて、y_{t+1}，…，y_{t+n}の任意の組合せの結合確率分布が、y_{t+1+s}，…，y_{t+n+s}の任意の組合せの結合確率分布に等しいとき、強定常性（strict stationarity）を充たすという。特に断らない限り、以下では定常性を弱定常性の意味で使うことにする。

相関（PAC）が、検定によく用いられる。

定常な確率過程の代表としてホワイト・ノイズ（white noise）がある。これは

$E(y_t)=\mu$　for all t　8.4)

$V(y_t)=\sigma^2$　for all t　8.5)

$Cov(y_t,\ y_{t-k})=0$　$k=\pm1,\ 2\cdots$　8.6)

を充たすもので、平均、分散が一定で、系列相関が全くないものである[3]。

ではなぜデータの定常性が問題になるのかを考えてみよう。次のような確率過程、あるいはデータの生成過程（data generating process, DGP）を想定する。

$y_t=y_{t-1}+u_t$　$u_t\sim IID(0,\ \sigma^2)$　8.7)

y_tは前期の値y_{t-1}とホワイト・ノイズな誤差に依存する。この8.7)式のような過程をランダム・ウオーク（random walk）という。

y_tの初期値をy_0とすると、

$y_1=y_0+u_1$

$y_2=y_1+u_2=y_0+u_1+u_2$

……

$y_t=y_0+u_1+u_2+\cdots u_t=y_0+\Sigma u_j$　8.7)'

となる。このとき

$E(y_t)=y_0$　8.8a)

$V(y_t)=E(u_1^2+u_2^2+\cdots u_t^2)=t\sigma^2$　8.8b)

$Cov(y_t,\ y_{t-k})=(t-k)\sigma^2$　8.8c)

となる。$t\to\infty$のとき、分散は無限大となるので、8.8b）式と8.8c）式よりこのデータは定常性を充たさない。

x_tもy_tと同様の性質を持つものであるとする。この時次の回帰を考える。

$y_t=a_0+a_1x_t+e_t$

e_tは誤差項とする。

$\hat{a}_1=\dfrac{\Sigma(x_t-\bar{x})y_t}{\Sigma(x_t-\bar{x})(x_t-\bar{x})}$でパラメータは与えられた。分母は何を意味するだろうか。

t統計は$t=\hat{a}_1/se(\hat{a}_1)$である。分散が無限大になるとき、t統計量は意味を持つであろうか？

GrangerとNewboldは8.7）式に従うy_tとx_tを独立にランダムサンプルを作成し、推計してこの問題を指摘した（独立の非定常なランダムサンプルであるからy_tとx_tは無相関である）。$a_1=0$の帰無仮説が伝統的なt検定で採択されず、かつ高い決定係数（R^2）が得られること、DWが極めて低いことを報告した[4]。本来相関を持たないはずのy_tとx_tの回帰でこのような結果が得られることは奇妙である。見せかけの相関（spurious correlation）から、高い決定係数と有意なt値が得られたのである。このような回帰を見せかけの回帰（spurious regression）という。被説明変数、説明変数の中に１個でも非定常な変数が含まれていれば、見せかけの回帰が生じる場合がある。これがデータが定常かどうかが問われる意味である。

非定常な性質を持つデータとしてどのようなものがあるかを見てみたい。

ランダム・ウオークとして8.7）式を考えた。8.7）式の１回の階差（first difference）をとると

$\triangle y_t=y_t-y_{t-1}=u_t$　8.9)

となり、8.9）式の$\triangle y_t$は定常となる。このように階差をとり定常過程になるものを階差定常（difference–stationary, difference–stationary process, DSP）という。１回の階差をとって定常になる場合を１次で和分された（integrated of order 1）といい、I⑴と表記する。d回の差分を取って定常になる場合をI(d)変数という。

[3] 期待値が０の場合ホワイト・ノイズをIID（independently and identically distributed, i.i.d）ということがあり、$y_t\sim IID(0,\ \sigma^2)$と表記する。
また正規分布にしたがうときNID（normally, independently and identically distributed, n.i.i.d）ということがあり、$y_t\sim NIID(0,\ \sigma^2)$と表記する。

[4] R^2＞DWは定式化の誤りのシグナルであることを３章で説明したが、これはまた見せかけの回帰のシグナルでもある。

8.7）式に定数項を加えると

$y_t = a + y_{t-1} + u_t \quad u_t \sim IID(0, \sigma^2)$　　8.10）

となる。これを趨勢付き、あるいはドリフト（drift）付きランダムウオークという。初期値をy_0とし代入を繰り返すと、以下のようである。

$y_t = at + y_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_t = at + y_0 + \Sigma u_j$　　8.10）'

$E(y_t) = at + y_0$は線形トレンドatを持ち、また$V(y_t)$は$t\sigma^2$となるのでy_tは非定常である。

１回の階差をとると、

$\triangle y_t = a + u_t$　　8.10）"

となり、平均aだけドリフトしている定常なデータとなる。これもDSPである。

さらにタイムトレンドtを考える。

$y_t = b_0 t + y_{t-1} + u_t \quad u_t \sim IID(0, \sigma^2)$　　8.11）

となる。ここでは係数b_0のトレンドを持つとする。上式を書き直すと

$\triangle y_t = b_0 t + u_t$　　8.11）'

$\triangle y_t - b_0 t = u_t$　　8.11）"

となり、トレンドの回りで定常となる[5)]。このような場合を確定的トレンド（deterministic trend）を持つという。時間に回帰しトレンドを除去（de-trending）し、定常にするものであり、確定トレンド定常過程（trend stationary process, TSP）という。8.11）式によって発生する$\triangle y_t$はTSP過程である。

これに対し、和分される過程の分散がトレンドに依存する場合、確率的トレンド（stochastic trend）を持つという。確率トレンドは階差定常の一つのパターンとして捉えることができる。

定数項とトレンドを加えた

$y_t = a + b_0 t + y_{t-1} + u_t$　　8.12）

を考えることができる。

DGPでデータが定常であるか、あるいはそれがDSPかTSPなのか、もしくは確率的トレンドを持つものか確定的トレンドを持つのかが問題となった。

DSPとTSPの違いは、TSPであればあるショックが加わってもその影響はやがては０となり、均衡はトレンドに復帰する、DSPであればショックは恒久的なもとして残り均衡事態が変化するということにある（8.7）式と8.10）式を参照）。たとえば伝統的なマクロのケインズ理論や貨幣数量説は、均衡への回帰を前提とする点で現実のデータはTSPであることを暗黙の内に仮定している。実物的景気循環論は技術進歩や生産性の革新の効果が累積しそのショックは恒久的で、均衡が変化するという点でDSPを想定している。

あるいは株式に関する効率的市場仮説は、株価がランダムウオークであることを想定している。

予測を行う場合、確定的トレンド（TSP）であれば、トレンドの回りで分散は一定であるから一定の幅の信頼区間となる[6)]。確率的トレンド（DSP）であれば、分散は時間と共に変化するために、長期の予測は誤差の分散が大きくなるので、これを長期予測に用いるのは困難である[7)]。

2　単位根検定

2.1　単位根

DGPでデータが定常であるか、あるいはそれがDSPかTSPなのか、もしくは確率的トレンドを持つものか確定的トレンドを持つのかが問題と

---

5)　8.11）式から明らかなように、トレンドのあるモデルは、階差をとっても期待値（平均）は時間に依存するので定常とはならない。

6)　例えば$y_t = a + bt + u_t$、$u_t \sim IID(0, \sigma^2)$を考える。Tまでの情報を使って$y_{T+j}$の予測（$y_{T+j/T}$として表記する）を作ると$y_{T+j/T} = a + b(T+j)$になり、予測誤差とその分散はそれぞれ$u_{T+j}$と$\sigma^2$となる。

7)　例えば、8.7）式を利用し、注6）と同様に$y_{T+j/T}$を作ると$y_{T+j/T} = y_T$になり、予測誤差とその分散はそれぞれ$u_{T+1} + \cdots + u_{T+j}$と$j\sigma^2$となる。

なった。このデータの定常性の検定を行うのが、Dickey、Fullerによって提唱された単位根検定である（unit root test）。次の定数項を持つAR（p）モデルを考える。

$y_t = a + b_1 y_{t-1} + b_2 y_{t-2} \cdots + b_p y_{t-p} + u_t$

$u_t \sim IID(0, \sigma_u^2)$　　8.13)

ラグオペレータL($Ly_t = y_{t-1}$　$L_2 y_t = y_{t-2}$, $\cdots L^p y_t = y_{t-p}$）を用いると、

$(1 - b_1 L - b_2 L^2 - \cdots - b_p L^p) \quad y_t = a + u_t$

8.14)

となる。このとき特性方程式（characteristic equation）

$1 - b_1 L - b_2 L^2 - \cdots - b_p L_p = 0$　b_kはパラメータ　8.15)

を考える。データが定常であるということは8.15）式の解（根）がすべて絶対値で１より大きいということである。

簡単な定数項のないAR(1)のケースを見てみよう。

$y_t = b_1 y_{t-1} + u_t$

ラグオペレータを使い書き直すと

$(1 - b_1 L) y_t = u_t$である。特性方程式は、

$1 - b_1 L = 0$

であり、$L = 1/b_1$の解を持つ。したがってデータが定常であれば$|b_1| < 1$である。直感的にいうと$|b_1| > 1$であれば、AR(1)モデルは発散する。$b_1 = -1$であれば、周期を２として発散する。従って問題となるのは$b_1 = 1$（すなわちL＝１、unity）のケースである。この検定を単位根検定という。

AR(3)のケースを考える。

$(1 - b_1 L - b_2 L^2 - b_3 L^3) y_t = u_t$　　8.16)

単位根が少なくとも１個存在すれば

$(1 + cL + dL^2)(1 - L) y_t = u_t$　　8.16)’

と書き直される（c、dはb_kに依存する）。単位根が１個のみであれば

$1 + cL + dL^2 = 0$の根の絶対値は１より大きいことになる。仮に単位根が２個存在するのであれば

$(1 - eL)(1 - L)(1 - L) y_t = u_t$、$|e| < 1$

8.16)”

となる（eはc、dに依存する）。２回階差をとると、

$(1 - L)(1 - L) y_t = \triangle^2 y_t$は定常となる。

2.2　DFテスト、ADFテスト

単位根の検定方法や統計量については実に多くの提案がなされている。最初に単位根の検定と検定統計量を示したDickey、FullerのDickey–Fullerテスト（DF test）とその拡張版であるADFテスト（Augmented Dickey–Fuller test, ADF test）についてみる。

（DFテスト）

DFテストは次の帰無仮説と対立仮説を考える。

帰無仮説は、データには単位根がある（データは非定常である）。

対立仮説は、データには単位根は存在しない（データは定常である）。

ランダム・ウオーク、ドリフト付きランダム・ウオーク、トレンドのあるモデルに応じて次の三つの式を考える。

$y_t = b_1 y_{t-1} + u_t$

$\triangle y_t = (b_1 - 1) y_{t-1} + u_t$　　8.17)

$y_t = a_0 + b_1 y_{t-1} + u_t$

$\triangle y_t = a_0 + (b_1 - 1) y_{t-1} + u_t$　　8.18)

$y_t = a_0 + b_0 t + b_1 y_{t-1} + u_t$

$\triangle y_t = a_0 + b_0 t + (b_1 - 1) y_{t-1} + u_t$　　8.19)

8.17）式において帰無仮説と対立仮説は、次のようにかける。

$H_0 : b_1 = 1$　　$H_0 : b_1 - 1 = 0$

$H_1 : b_1 < 1$　　$H_1 : b_1 - 1 < 0$

ここで帰無仮説についてt検定を行うことが考

えられる。残念ながら単位根が存在する場合、その分布は通常のt分布に従わないことをDickey、Fullerは示した。8.17）〜8.19）式でそれぞれ分布が異なる。MacKinnonは更に詳細な統計量を示した。その分布をτ分布、統計量をτ統計量という[8]。このτ分布はt分布に比べて、下側（マイナス）に片よっている。8.17）〜8.19）式に応じてτ_{nc}、τ_{c}、τ_{ct}とMacKinnonは表記している（ncはno constant、cはconstant、ctはconstant and trendである。なお表記の仕方は人によりまちまちであり、関連文献を読むときは注意してほしい）。サンプルが1,000の時５％水準の臨界値は、−1.94（τ_{nc}）、−2.86（τ_{c}）、−3.41（τ_{ct}）である。１％水準の臨界値は−2.56（τ_{nc}）、−3.43（τ_{c}）、−3.96（τ_{ct}）である（Davidson and MacKinnon [1993], table 20.1）。

対立仮説をみると、この検定は片側検定で行うべきであることが分かる。得られた統計量がτ統計量の臨界値よりも小さければ、帰無仮説は棄却される（単位根は存在せず、データは定常である）。得られた統計量が臨界値より大きければ、帰無仮説は棄却されない（単位根は存在し、データは非定常である）。

（ADFテスト）

時系列データでは誤差項に系列相関がしばしば生じる。系列相関がある場合の単位根検定として考えられたのがADF（Augmented Dickey–Fuller）テストである。簡単なAR(2)のケースを考える。

$$y_t = b_1 y_{t-1} + b_2 y_{t-2} + u_t$$

$$u_t \sim IID(0,\ \sigma^2) \qquad 8.20)$$

ラグオペレータを使い書き直すと

$$(1 - b_1 L - b_2 L^2) y_t = u_t$$

$$(1 - cL)(1 - dL) y_t = u_t$$

である。ここで$c + d = b_1$、$cd = -b_2$である。$|c| < 1$かつ$|d| < 1$であれば単位根は存在しないことは前述した。$c = 1$かつ$|d| < 1$であれば１個の単位根が存在し、データは非定常である。このとき$b_1 + b_2 = 1$、$b_2 = -d$である。これを利用して書き直すと

$$y_t = (b_1 + b_2) y_{t-1} - b_2 (y_{t-1} - y_{t-2}) + u_t$$

$$\triangle y_t = (b_1 + b_2 - 1) y_{t-1} - b_2 \triangle y_{t-1} + u_t \qquad 8.21)$$

となる。以下の仮説検定を行えばよい。

$H_0 : b_1 + b_2 - 1 = 0$

$H_1 : b_1 + b_2 - 1 < 0$

8.21）式において$\triangle y_t$の最大のラグが１なので、これはADF(1)と呼ばれている。

8.18）式、8.19）式に対応して

$$y_t = a_0 + b_1 y_{t-1} + b_2 y_{t-2} + u_t$$

$$\triangle y_t = a_0 + (b_1 + b_2 - 1) y_{t-1} - b_2 \triangle y_{t-1} + u_t \qquad 8.22)$$

$$y_t = a_0 + b_0 t + b_1 y_{t-1} + b_2 y_{t-2} + u_t$$

$$\triangle y_t = a_0 + b_0 t + (b_1 + b_2 - 1) y_{t-1} - b_2 \triangle y_{t-1} + u_t \qquad 8.23)$$

とドリフトやトレンドを含むモデルの検定に拡張できる。ラグの選択が正しいとして$b_1 + b_2 - 1 = 0$をt検定で検定する場合には、8.21）式、8.22）式と8.23）式の臨界値は、それぞれ8.17）式、8.18）式と8.19）式と同値になる。

一般的なADFテスト（ADF(p)）は以下のようになる。

$$\triangle y_t = c y_{t-1} + d_1 \triangle y_{t-1} + \cdots + d_p \triangle y_{t-p} + u_t \qquad 8.24)$$

ここにおいて、$H_0 : c = 0$、$H_1 : c < 0$を検定すれば良い。$d_1, \cdots, d_p$の仮説検定を行う場合t統計量は標準正規分布に従うこのに対して、$c = 0$の仮説検定を行う場合t統計量はτ分布に従う。ドリフトやトレンドを含むモデルは同じように拡張できる。

$$\triangle y_t = a_0 + c y_{t-1} + d_1 \triangle y_{t-1} + \cdots + d_p \triangle y_{t-p} + u_t$$

---

8) 分布表は山本［1988］、Davidson and Mackinnon［1993］に与えられている。

$$u_t \sim IID(0,\ \sigma^2) \qquad 8.25)$$

$$\triangle y_t = a_0 + b_0 t + c y_{t-1} + d_1 \triangle y_{t-1} + \cdots + d_p \triangle y_{t-p} + u_t$$

$$u_t \sim IID(0,\ \sigma^2) \qquad 8.26)$$

2.3　PPテスト

系列相関がある場合にも有効な単位根検定を行うもう一つの方法が、PhillipsとPerronによって開発されたノンパラメトリック（nonparametric）な検定方法でPhillips–Perronテスト（PPテスト）である。これはNewey–Westの分散不均一と系列相関がある下での一致性のある推定量の考え方を利用するものである。

$$\triangle y_t = (b_1 - 1) y_{t-1} + u_t = c y_{t-1} + u_t \qquad 8.27)$$

を考える。PPテストの統計量Zは、

分散を$S_u^2 = 1/T \sum_{t=j+1}^{T} \hat{u}_t \hat{u}_t$、

$$S_{tq}^2 = \sum \hat{u}_t \hat{u}_t / T + 2 \sum_{t=1}^{q} \sum_{t=j+1}^{T} \hat{u}_t \hat{u}_{t-j} / T \qquad 8.28)$$

qはラグの次数[9]とし、

$$Z = (S_u \tau_{b1}) / S_{tq} - 1/2 (S_{tq}^2 - S_u^2)$$
$$/\{S_{tq} (T^2 \sum_{t=2}^{T} (y_{t-1} - \overline{y_{-1}})^2)^{1/2}\} \qquad 8.29)$$

で与えられる。τ_{b1}は8.27）式におけるcのt値である。この統計量の臨界値は8.17）式のDF検定と同様になる。

8.18）式と8.19）式に対応して、推計を行うことになる。これらの統計量の臨界値はそれぞれ8.18）式と8.19）式のDF検定と同様になる。

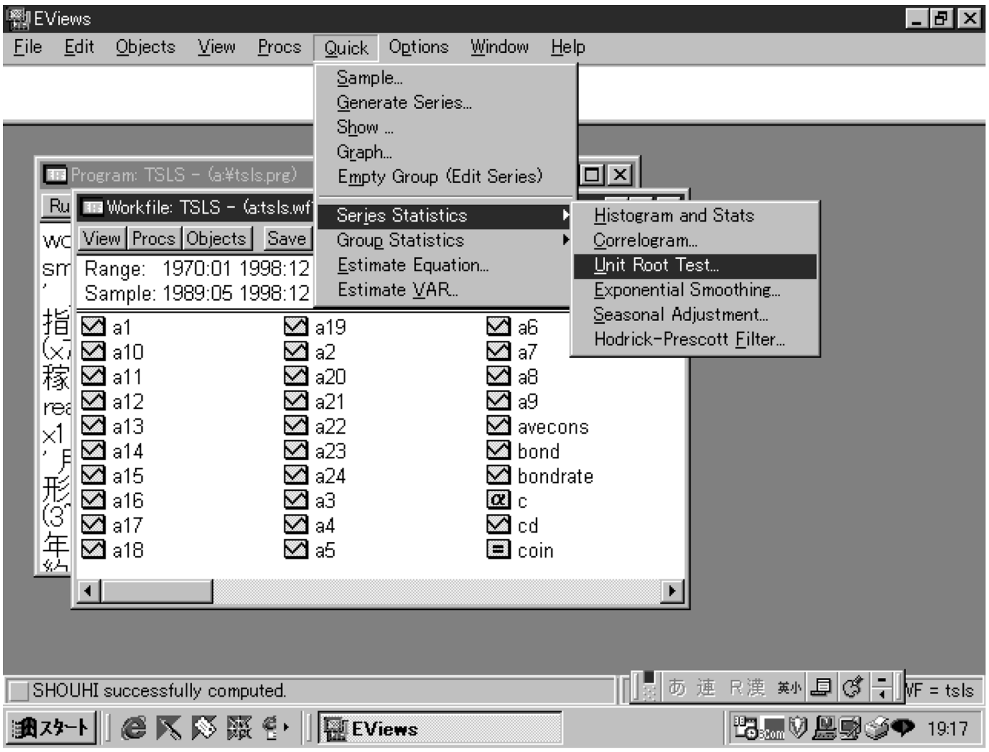
2.4　Eviewsでの推計例

単位根の検定は

Quick/Series Statistics/Unit Root Test

を選択する（図１参照）。単位根の検定を行う変数名をSeries nameとして聞いてくる。

図8.1　単位根の検定選択



9) Eviewsはラグの次数qを
q＝floor(4(T/100)^{2/9}) で選択する。

Series　nameのダイアログに検定したい変数名を指定する（図２参照)。たとえばdisposalという変数を入れる。

その次に

Test Typeとして**Augmented Dickey–Fuller**か**Phillips–Perron**かの選択、

Test for unit root inとしてレベル（**Level**)、１回の階差（**1st difference**）、２回の階差（**2nd difference**）のいずれによるか、

Include in test equationとして、定数項を含む（**Intercept**)、トレンドと定数項とを含む（**Trend and intercept**)、いずれも含まない（**None**）の選択、

Lagged differenceとして何期ラグを取るかの選択

を聞いてくる（図３参照)。

具体的な手順としては、

① DFテスト、ADFテスト、PPテストの選択（ADFを選択し、ラグの長さを０とすればDFテストとなる）を行う。

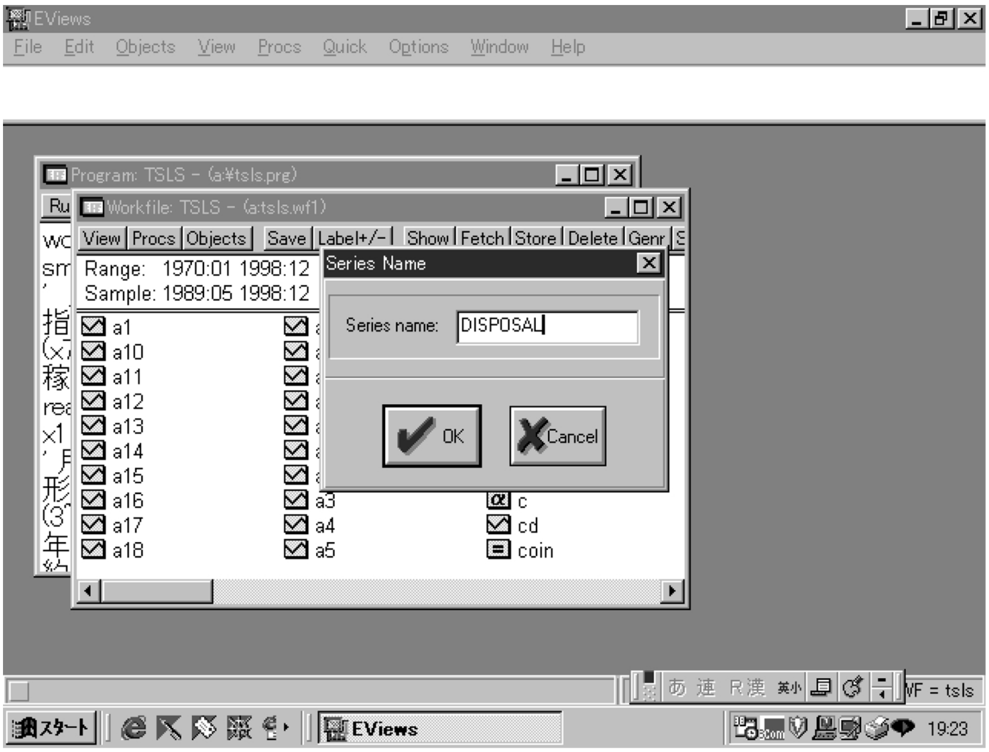
② 8.17）～8.19）式、8.24）～8.26）式に対応して、定数項(ドリフト)とトレンド共に無し、定数項有り（トレンド無し)、定数項とトレンドを共に含むのいずれのモデルを選ぶのかを選択する。

③ ADFテストまたはPPテストを選択するのであれば、ラグの長さを選択する[10)]。

④ レベルで検定するか、１回の階差をとったものについて検定するか、２回の階差をとったものについて検定するかを選択する。

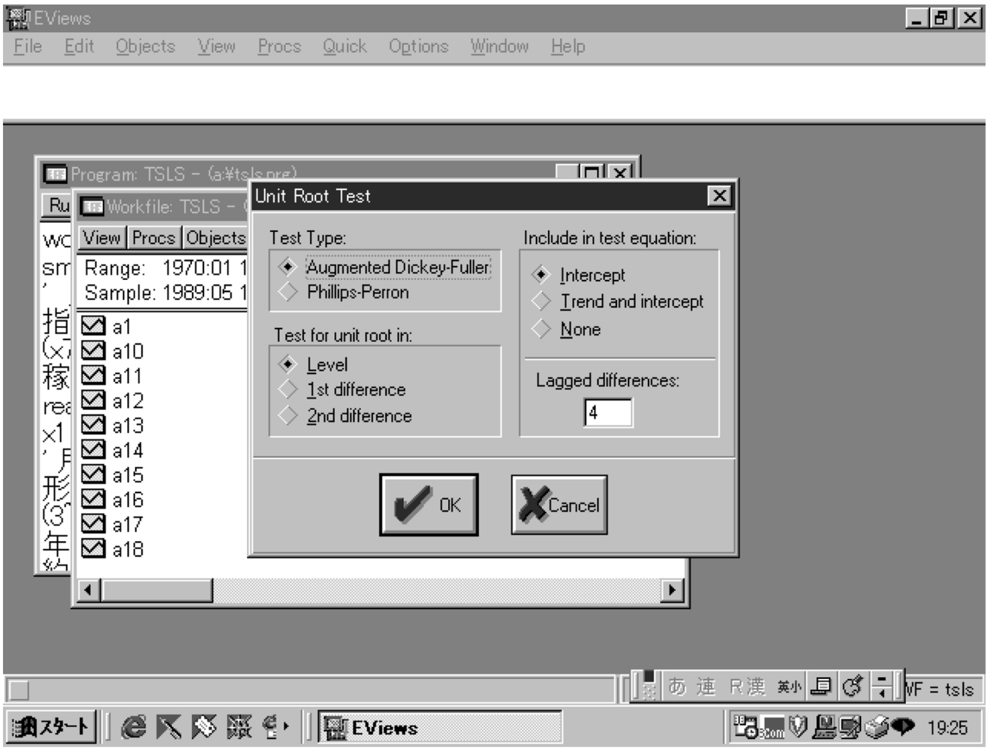
以上のそれぞれについて指定しなくてはならない。一般的な例を挙げれば

図8.2　検定する変数の入力



10) ラグの長さの意味はこの二つのテストによって違うことに注意が必要である。ADFテストの場合ラグの選択は8.24）式（又は8.25）式、8.26）式）におけるpの選択になるが、PPテストの場合ラグの選択は8.28）式におけるqの選択になる。

図8．3　単位根の検定方法の選択



A）ADFテストとPPテストを共に行う。

B）少なくとも定数項を含む（Intercept)、トレンドと定数項とを含む（Trend and intercept）の二通りのモデルの検定は行う。

C）ADFテストの場合ラグの長さは十分長く取り、有意でないものについて除去し短くする（選択はAICによることが多い)。

D）レベルから始め、レベルで単位根の存在が棄却されなければ１回の階差をとる[11]。

プログラムを書くのであれば、トレンドと定数項とを含むモデルについていうと、DF、ADF（ラグの長さは２とする)、PPテスト（ラグの長さは２とする）は次の通りである。

disposal. UROOT（t)

disposal. UROOT（t, 2)

disposal. UROOT（h, t, 2)

disoposalはもちろん調べている変数の名前になる。HはPPテストを選ぶオプションである（ADFが既定値)。定数項のみのモデルであれば**t**に替えて**i**、定数項トレンド共に無しであれば**n**を入れる。

Eviewsは検定統計量の臨界値としてはMacKinnonの値によっている。その値を自動的に報告する。

ここでは実質国内総生産(70〜97年)の年次データの単位根検定の結果を掲げておく（定数項とトレンドを共に含むモデルについてのみである)。

DFテストの結果をレベル（表8. １）と１回の階差（表8. ２）について示す。

表8. １を見ると最上欄に検定の対象となった変数名が示される（ここではREALGDPである)。

---

[11] 理論的にこの１回の階差についても単位根の存在が棄却されなければ２回の階差をとり検定を進める。もちろん２回の階差をとればデータが定常になるという保障はない。その時は３回の階差をとった変数を新しく作り、この手順を繰り返す。しかしいままでの研究報告を見るとＩ⑵（又はＩ⑶）の性質を持つ経済変数はほとんどないようである。

表8.1　Augmented Dickey–Fuller Unit Root Test on REALGDP

ADF Test Statistic	−1.744497	1% Critical Value*	−4.3382
		5% Critical Value	−3.5867
		10% Critical Value	−3.2279

*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.

Augmented Dikhey–Fuller Test Equation
Dependent Variable: D (REALGDP)
Method: Least Squares
Sample (adjusted): 1971 1997
Included observations: 27 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t–Statistic	Prob.
REALGDP (−1)	−0.206572	0.118413	−1.744497	0.0939
C	449022.1	199683.0	2.248674	0.0340
@TREND (1970)	24751.59	13900.88	1.780577	0.0876

R–squared	0.118311	Mean dependent var	112525.4
Adjusted R–squared	0.044837	S.D. dependent var	64234.47
S.E. of regression	62777.91	Akaike info criterion	24.03703
Sum squared resid	9.46E+10	Schwarz criterion	25.18102
Log likelihood	−335.0000	F–statistic	1.610244
Durbin–Watson stat	1.325728	Prob (F–statistic)	0.220691

表8.2　Augmented Dickey–Fuller Unit Root Test on D (REALGDP)

ADF Test Statistic	−3.544945	1% Critical Value*	−4.3552
		5% Critical Value	−3.5943
		10% Critical Value	−3.2321

*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.

Augmented Dickey–Fuller Test Equation
Dependent Variable: D (REALGDP, 2)
Method: Least Squares
Sample (adjusted): 1972 1997
Included observations:26 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t–Statistic	Prob.
D (REALGDP (−1))	−0.718944	0.202808	−3.544945	0.0017
C	79582.78	34187.38	2.327841	0.0291
@TREND (1970)	137.7572	1721.138	0.080038	0.9369

R–squared	0.356164	Mean dependent var	−516.5000
Adjusted R–squared	0.300179	S.D. dependent var	77979.17
S.E. of regression	65233.73	Akaike info criterion	25.11751
Sum squared resid	9.79E+10	Schwarz criterion	25.26267
Log likelihood	−323.5276	F–statistic	6.361699
Durbin–Watson stat	1.783678	Prob (F–statistic)	0.006323

次にADF統計量（この場合はDF検定であるからDF統計量と読者は読み替えられたい）－1.74が示される。その横に有意水準１％、５％、10％の臨界値が示されている。

検定したモデルの被説明変数が△REALGDPことを表示する（D（REALGDP）で示される）。

説明変数について係数、t統計量等が表示される。これはOLSの場合と同じである。

単位根の検定のためにDF統計量の値と臨界値を比較する。５％水準では－1.74＞－3.59であるから、単位根が存在するという帰無仮説は棄却されない。すなわちレベルで見た実質GDPは非定常である。そのまま回帰分析に利用すると見せかけの回帰となってしまう可能性がある。このケースに見られた単位根問題が経済学や経済政策に与えたショックは重大であった。実質GDPが非定常であれば、それをそのまま用いた経済分析は意味が無く、それに基づく政策は判断を誤る場合があるからである[12]。

表8.２を見ると１回の階差をとった場合、最上欄に検定対象が△REALGDPであることが表示される（D（REALGDP）で示される）。

検定の対象となった式の被説明変数が$\triangle^2$REALGDPことが表示される（D（REALGDP, 2）で示される）。DF統計量は－3.54であり、５％の臨界値－3.59をわずかに上回っている。

ADFテストとPPテストについて１回の階差（ラグは３期）をとった結果を掲げておく（表8.３、

表8.３　Augmented Dickey–Fuller Unit Root Test on D（REALGDP）

ADF Test Statistic	－3.105047	1% Critical Value*	－4.4167
		5% Critical Value	－3.6219
		10% Critical Value	－3.2474

*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.
Augmented Dickey–Fuller Test Equation
Dependent Variable: D（REALGDP, 2）
Method: Least Squares
Sample（adjusted）: 1975 1997
Included observations: 23 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t–Statistic	Prob.
D（REALGDP（－１））	－1.054814	0.339709	－3.105047	0.0064
D（REALGDP（－１），２）	0.381567	0.279486	1.365245	0.1900
D（REALGDP（－２），２）	0.351332	0.264047	1.330566	0.2009
D（REALGDP（－３），２）	0.339370	0.236450	1.435272	0.1694
C	119820.0	43416.78	2.759762	0.0134
@TREND（1970）	163.3174	1943.212	0.084045	0.9340

R–squared	0.457863	Mean dependent var	4236.435
Adjusted R–squared	0.298411	S.D. dependent var	69074.71
S.E. of regression	57857.59	Akaike info criterion	24.98882
Sum squared resid	5.69E＋10	Schwarz criterion	25.28503
Log likelihood	－281.3714	F–statistic	2.871481
Durbin–Watson stat	1.754951	Prob（F–statistic）	0.046628

[12] 単位根の検定方法、統計量は実に様々である。実質GDPが必ず単位根を持つとまで言い切ることはできない。その疑いは常にあるということである。それからREALGDPは単位根を持つかどうかという問題と対数をとったlog（REALGDP）は単位根を持つかどうかという問題とは、異なる問題である。

表8．4　Phillips–Perron Unit Root Test on D（REALGDP）

PP Test Statistic	−3.514598	1%	Critical Value*	−4.3552
		5%	Critical Value	−3.5943
		10%	Critical Value	−3.2321

*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.

Lag truncation for Bartlett kernel: 3 (Newey–West suggests: 3)	
Residual variance with no correction	3.76E+09
Residual variance with correction	3.60E+09

Phillips–Perron Test Equation
Dependent Variable: D（REALGDP, 2）
Method: Least Squares
Sample（adjusted）: 1972 1997
Included observations: 26 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t–Statistic	Prob.
D（REALGDP（−1））	−0.718944	0.202808	−3.544945	0.0017
C	79582.78	34187.38	2.327841	0.0291
@TREND（1970）	137.7572	1721.138	0.080038	0.9369

R–squared	0.356164	Mean dependent var	−516.5000
Adjusted R–squared	0.300179	S.D. dependent var	77979.17
S.E. of regression	65233.73	Akaike info criterion	25.11751
Sum squared resid	9.79E+10	Schwarz criterion	25.26267
Log likelihood	−323.5276	F–statistic	6.361699
Durbin–Watson stat	1.783678	Prob（F–statistic）	0.006323

8.４参照)。ADFテストについてみると１回の階差をとっているので、検定の対象の変数は△REALGDP（D（REALGDP））である。

表8.３を見ると階差をとり、かつラグが３期であるので、サンプルが1975年〜1990年となっていることが示される（Sample（adjusted））。ただしトレンドの始期は1970年で変わらない。ここでもADF統計量は−3.105であり、５％の臨界値−3.62を上回っている。

表8.４を見るとPPテストについては、最上欄にPhillips–Perron Unit Root Testとしてその旨表示される。選択したラグが３期であること、EviewsがNewey–Westで望ましいとしたラグが３期であることが示される。

１回の階差をとった関係でサンプル期間が1972年〜1990年であることが示される。

これらのEviewsの出力結果を全て論文で報告する必要はない。主要な結果のみを報告する。そのやり方は研究者により様々である。一つの例は次のようなものである。

	DF		ADF		PP	
	トレンドあり	トレンド無し	トレンドあり	トレンド無し	トレンドあり	トレンド無し
REALGDP	−1.744	−0.215	−3.314	0.403	−1.999	0.137
△REALGDP	−3.545	−3.642**	−3.105	−3.307**	−3.515	−3.617**
ラグ	0	0	3	3	3	3

**は５％水準で単位根が存在するという帰無仮説が棄却されることを示す（臨界値はMacKinnon［1991］による）

2.5　単位根検定の課題

時系列データの分析で単位根検定は、今日不可欠の手順となっている[13)]。しかし課題も多いのが実状である。

第一の課題はDF、ADF、PPあるいは他に紹介されている検定方法も、検出力（power）が弱いということである。根の値が１に近い（たとえば0.98)場合、帰無仮説を棄却しないことがある[14)15)]。

季節調整済みデータ（seasonally adjusted data）の使用の問題もある。マクロの時系列データは季節変動が大きいものが多い（消費など)。四半期データや月次データでは季調済みデータが用いられることが多い。その場合帰無仮説を棄却しないバイアスがかかることが指摘されている。季調済みデータを利用するよりも年次データを利用することが望ましいということが、MacKinnonやPerronなどによって指摘されている[16)]。サンプル数の問題よりは時間のスパン（span）の問題の方がより重要だというものである。

第三の課題は構造変化が起きた場合、その検出力が著しく低くなることである。トレンドが変化したり、ある時点でジャンプが起きることは、長期間にはよくあることである。この場合構造変化（structural break）の前と後の各々は定常であっても、両期間を含むと単位根の存在をほとんど棄却しないことが知られている。そのためにBanerjee, Lumsdaine, Stock（BJS）はサブサンプル毎に逐次的な（recursive）な検定を行うことを提唱している。BJSはいくつかの検定量を提案しているが、ここでは二つを紹介する。

一つは定数項のダミー変数（又はトレンドのダミー変数）をADFモデルに追加し、全てのデータを使用してモデルを推定し、ADF検定量を計算する。その上で構造変化が起こる時点を１期間変えて、ダミー変数を作り直して作業を繰り返すことである。具体的には次のようである。

$$\triangle y_t = a_0 + b_0 t + b_1 y_{t-1} + b_2 \triangle y_{t-1} + cD_t(k) + u_t$$

$$u_t \sim IID(0,\ \sigma^2) \qquad 8.30)$$

トレンドの構造変化を考えるのであれば、

$$D_t(k) = t \quad \text{if } t > k$$
$$\quad = 0 \quad \text{if } t \leqq k$$

とする。ドリフト（定数項）の構造変化を考えるのであれば

$$D_t(k) = 1 \quad \text{if } t > k$$
$$\quad = 0 \quad \text{if } t \leqq k$$

とする。8.30）式を推定する時は全て（１，…，T）のデータを使う。得られるADFのt統計量はkの選択に依存するからADF^s_kとして表記する。kをmからT－mまで一個ずつ増やして8.30）式を繰り返して推定するとADF^s_m，…ADF^s_{T-m}が得られる。標本数が250の場合BJSは（ADF^s_m，…ADF^s_{T-m}）の最小値の５％有意水準の臨界値は－4.80（ドリフト・ダミー）と－4.39（トレンド・ダミー）となることを報告している。それらの臨界値より低い統計値を得ると、データには単位根がなくてそれぞれドリフト変化とトレンド変化の証拠になる。BJSによると（m/T）を0.15ぐらいに設定した方が良いとされている。この検定方法は遂次検定（Sequential　Test）と呼ばれている。

もう一つの方法は、推定サンプル数をsに設定

13) 時系列分析では単位根検定を行っていない場合、論文の中に他にどのように優れた着想があろうとも、それだけで相手にされないといっても過言ではない状況にある。

14) 帰無仮説をデータは定常である、対立仮説をデータは非定常である、と入れ替えた場合、検定結果が異なりうることも指摘されている。

15) ADFテストも、PPテストも大標本を前提としている。しかし実際我々が用いる時系列データのサンプル（期間）は、かなり短く大標本の前提を充たさないことが多いという問題もある。

16) 季調済みの単位根検定の方法も研究されているが、年次データによる単位根検定とサンプル数が４倍となる四半期データによる単位根検定を比較すると、後者の検出力の方が前者の検出力よりはそれほど高くはならないともいわれている。

し、t＝n＋1，…，n＋sのデータを使用して8.26）式を推定し、ADF検定量を得ることである。得られたADFのt統計量はnの選択に依存するからADF$^{r}_{n}$として表記する。nを0からT－sまで一個ずつ増やして繰り返して推定・検定するとADF$^{r}_{0}$，…ADF$^{r}_{T-s}$が得られる。標本数が250の場合BJSは（ADF$^{r}_{1}$，…ADF$^{r}_{T-s}$）の最小値の5％有意水準の臨界値は−4.85となることを報告している。なおBJSはsを全体のサンプルの1／3に選ぶように提案している。この検定方法はローリング検定（Rolling Test）と呼ばれている。

その簡単な例を円・ドル為替レート（EXCH）で見てみる。

（Eviewsの推計例）

```
workfile a: exch m 73: 6 98: 12
read a: exch. txt exch
smpl 73: 6 98: 12
 '作業領域を設定
series _temp=1
! length=@obs (_temp)
delete _temp
 'ドリフトを考慮する遂次検定（Sequential Test）
 'm=45を選択する
! ssize=45
series time=@trend
 '結果を保存する領域を作る。adfstatと名付ける。
matrix ( ! length-2* ! ssize+1, 2) adfstat
 '全てのデータを使用して推計する。
 '△EXCH=a0+b1EXCH(-1)+b2t+b3DUM+ut
  を推計する
 'ドリフト・ダミー変数を定義し直すためのループ文
for ! i=1 to ! length-2*! ssize+1
series dum=time>! i+! ssize
 '8.30）式の設定・推定
 equation temp. ls d (exch) c exch (-1) time
 dum
 'exch(-1）のt値をadfstatの1列目に保存する。
 adfstat (! i, 1) =temp.@tstat (2)
 'BPSよりadfstatの最小値の臨界値（-4.80）を
 adfstatの2列目に保存する
 adfstat (!i, 2) =-4.80
next
 '以上で各ダミー変数モデルの推計のためのループ分終了
 'adfstat. lineとしてadfstatに保存されて各ダミーのADF統計と臨界値を
 '折れ線グラフとして保存 （graph 1と名付ける）
freeze (graph 1) adfstat. line
graph1. name (1) ADF t-statistic
graph1. name (2) asymptotic 5% critical value
for min ADF
 'Sequential ADF t-statistic for Exchange Rate
とグラフに表示する
graph1. addtext (t) Sequential ADF t-statistic
for Exchange Rate
show graph 1
 'ローリング検定（Rolling Test）を行う
 's=100を選択する。
! ssize=100
 '結果を保存する領域を作る。adfstat 1と名付ける
matrix (! length-! ssize+1, 2) adfstat 1
 'サブサンプル毎に推計する。
 '△EXCH=a0+b1EXCH(-1)+b2t+utを 推計する
 '各期逐次推計を行うためのループ文
for! i=1 to ! length+1-! ssize
  smpl @first+! i-1 @first+! i+! ssize-2
  equation temp. ls d (exch) c exch (-1) time
 'exch(-1）のt値をadfstatの1列目に保存する。
 adfstat 1 (! i, 1)=temp. @tstat (2)
```

'BPSよりadfstatの最小値の臨界値（−4.85）をadfstatの２列目に保存する

adfstat 1（! i, 2）＝−4.85

next

'以上で各ダミー変数モデルの推計のためのループ分終了

'adfstat 1. lineとしてadfstat 1に保存されて各ダミーのADF統計と臨界値を

'折れ線グラフとして保存（graph２と名付ける）

freeze（graph 2）adfstat 1. line

graph 2. name（1）ADF t–statistic

graph 2. name（2）asymptotic 5% critical value for min ADF

graph 2. addtext（t）Rolling ADF t–statistic for Exchange Rate（Window＝100）

show graph 2

ドリフト構造変化を考慮する逐次検定結果とローリング検定結果はそれぞれ図8. 4と図8. 5に示すとおりである。図8. 4によるとすべてのADF検定値が臨界値より高いので単位根があるという帰無仮説を棄却することができない。それに対して図8. 5によると１ヶ所のみであるが、検定値が臨界値を下回っていることが分かる。

図8.４　Sequential ADF t–statistic Exchange Rate

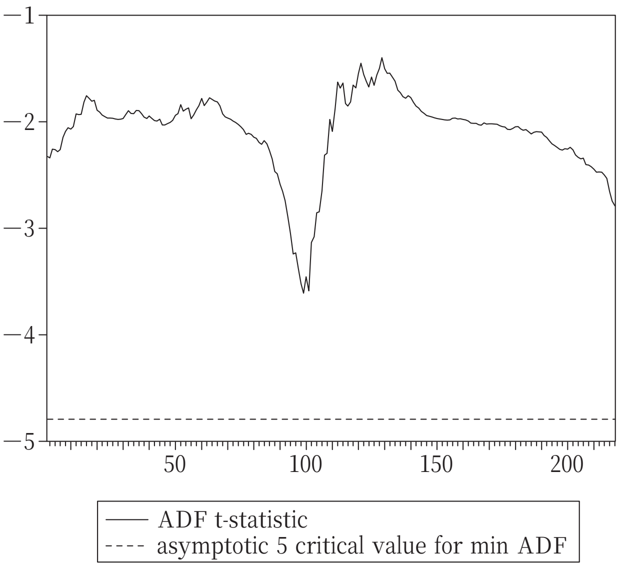
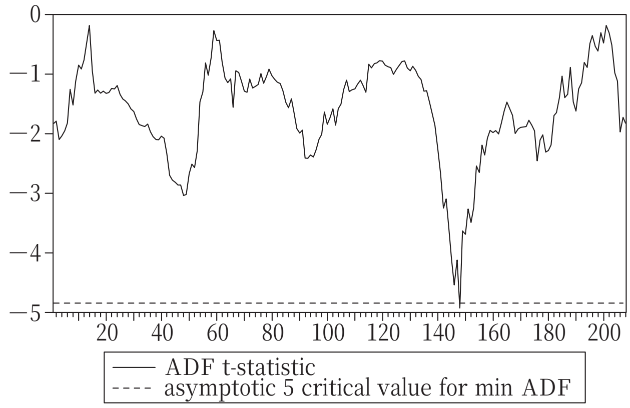


図8.５　Rolling ADF t–statistic for Exchange Rate（window＝100）



３　共和分とEngle–Grangerの推定法

3.１　共和分関係

ある変数（y、x）が１回階差をとれば定常となるⅠ⑴変数であるとき、

$y_t = a + bx_t + u_t$　　8.31）

の推計が見せかけの回帰モデルである可能性があることを見てきた。8.31）式においてu_tの性質が非常に重要となる。8.31）式より

$u_t = y_t - a - bx_t$　　8.32）

である。bが本当にゼロであればu_tはy_tと同様にⅠ⑴の変数になり、8.31）式は見せかけの回帰モデルになる。一般的に二つのⅠ⑴変数の線形結合もⅠ⑴の変数になるので、通常8.32）式にあるu_tもⅠ⑴になる。しかしu_tはⅠ⑼の変数になるケースがある。u_tがⅠ⑼の変数であればy_tとx_tは共和分された（cointegrated）といい、共和分関係（cointegration）をもつという[17)]。一次の次数で和分されているのでCI(1,1)と書くことがある[18)]。この場合8.31）式の推定よりy_tとx_tとの長期関係についての情報が得られる。u_tがⅠ⑴の変数であれば、y_tとx_tとの間には長期関係は存在しない。ここから8.31）式のu_tは単位根を持つかどうかということが問題になる。

8.31）式が見せかけの回帰モデルの場合、このデータを定常にした

$\triangle y_t = a^* + b\triangle x_t + u_{2t}$　　8.33）

の推計は、計量経済学の観点からは何ら問題なく行うことができる。この場合、$\triangle y_t$と$\triangle x_t$の間の短期の効果（short–run relationship）に焦点が当たり、レベルのy_tとx_tの長期の関係（long–run relationship）に関する情報は無視されることになる。可能であればこの長期の関係の情報も取り込んだ方が望ましい。y_tのその期の変化はx_tのその期の変化だけではなく、前期のy_{t-1}とx_{t-1}の関係にも依存することがあるからである。

先に説明したように、8.31）式のu_tが単位根を持つかどうかということが問題であるが、u_tを観測することが可能であればu_tにADF検定などをそのまま適用することができる。

8.31）式をOLSで推定するとaとbの推定量（$\hat{a}$と$\hat{b}$）と残差（$\hat{u}_t$）が得られる。

$\hat{u}_t = y_t - \hat{a} - \hat{b}x_t$　　8.34）

u_tが定常であれば、$\hat{u}_t \sim I(0)$も定常になり、この$\hat{u}_t$を推計に利用することができる[19]。

y_tとx_tが下記の二つの条件を満たすのであれば、y_tとx_tには共和分関係が存在する。

①　y_tとx_tが共にI(1)変数である。

②　$y_t - \hat{a} - \hat{b}x_t$がI(0)となる線形結合が存在する。

この時は、短期効果のみならず長期効果を考えた

$\triangle y_t = c + d\triangle x_{t-1} + f(y_{t-1} - \hat{a} - \hat{b}x_{t-1}) + u_{1t}$

$\quad = c + d\triangle x_{t-1} + f\hat{u}_{t-1} + u_{1t}$　　8.35）

を分析することができる[20]。

3.2　共和分の検定とECM

（共和分の検定）

共和分の検定についてEngleとGrangerによって提唱された方法（Engle–Granger test, EG test）についてみる。変数が２個の場合をみてみたい。

EGテストはADFテストの直接的な応用である。

y_tとx_tが共にI(1)であることを検定で確かめる。

$y_t = a + bx_t + u_t$

をOLSで推計する。そこから得られる残差

$\hat{u}_t = y_t - \hat{a} - \hat{b}x_t$　　8.36）

に関して、帰無仮説と対立仮説を次のようにおき、

H_0：u_tはI(1)である。

H_1：u_tはI(0)である。

検定を行う。具体的にはADFの単位根検定を

$\triangle\hat{u}_t = a + \alpha\hat{u}_{t-1} + \beta\triangle\hat{u}_{t-1} + w_t$

$w_t \sim IID(0, \sigma^2)$　　8.37）

について行う。帰無仮説と対立仮説は次の通り

---

17) 二変数の場合、共和分関係をもたらすパラメータは１個のみである。
y_tを１に基準化し、
$v_t = y_t - c_0 - c_1x_t$　　s１）
を考える。ここで$\theta_0 = c_0 - a$　$\theta_1 = c_1 - b$とする。a、bは8.31）の係数。8.31）式をs１）に代入すると
$v_t = y_t - c_0 - c_1x_t - \theta_0 - \theta_1x_t$
$\quad = u_t - \theta_0 - \theta_1x_t$　　s２）
u_tはI(0)で、x_tはI(1)であるから、線形結合のv_tもI(1)である。
　$E(v_t) = 0$の条件で$v_t \sim I(0)$であり得るのは、$\theta_0 = \theta_1 = 0$のときである。しかしこのとき$v_t = u_t$となるので、u_tは一意に定まる。

18) 一般的にCI(p、q)は複数のI(p)変数のある線形結合がI(p−d)となることを意味する。

19) 8.34）式と8.31）式より
$= y_t - \hat{a} - \hat{b}x_t = u_t(\hat{u}_t - \hat{a}) + (b - \hat{b})x_t$
ことがわかる。u_tがI(1)の変数であれば$\hat{u}_t$もI(1)である。u_tがI(0)の変数の場合、説明はより複雑だが$\hat{u}_t$もI(0)になる（標本数が無限大の時、$\mathrm{plim}\hat{b} = b$）。

20) 場合によっては8.35）式に$\triangle y_t$と$\triangle x_{t-1}$のラグを追加する必要がある。もし$\triangle x_t$とu_{1t}との相関がゼロであれば
$\triangle y_t = c^* + d_*\triangle x_t + f^*(y_{t-1} - \hat{a} - \hat{b}x_{t-1}) + u_{1t}$
$\quad = c^* + d^*\triangle x_t + f^*\hat{u}_{t-1} + u_{1t}$
を分析することができる。

である。

H_0：$\alpha=0$

H_1：$\alpha<0$

$\hat{u}_t$はOLS推計から得られた残差であるから、8.37）式のADF検定の分布は第2.2節で説明したADF分布とは異なる。通常のADF分布の臨界値を利用すると帰無仮説が棄却されやすくなる。また検定統計量の分布が元の式（現在の例で言えば8.31）式）の説明変数の数によっても変わってくる。t分布はもとよりDickey–Fullerの分布も利用することができない。MacKinnonによって示された分布表で判断することになる（Davidson and MacKinnon［1993］ table 20.2)。8.31）式のように変数が2個の場合は、5％水準の臨界値は$\tau_c=-3.34$、1％水準の臨界値は$\tau_c=-3.90$である。8.37）式にトレンドを追加した場合5％水準の臨界値は$\tau_{ct}=-3.78$、1％水準の臨界値は$\tau_{ct}=-4.32$である。

ADF検定の応用であるから検出力が弱い、あるいは構造変化がある場合等の課題はそのまま、共和分検定にも当てはまる。

手形売買レートの1ヶ月もの（TEGATA1と表記）と譲渡性預金平均金利（3ヶ月もの、新規発行レート、CD3と表記）についてみよう（期間1985年4月～1998年12月)。金融市場に裁定が働いていれば、共和分が存在することが予想される。

単位根検定の結果は次の通りであった。

TEGATA1	−1.139**
CD3	−0.947**
△TEGATA1	−5.041
△CD3	−4.762

検定式：　$\triangle y_t=a_0+b_1y_{t-1}+\Sigma_{i=1}^{p=4}c_i\triangle y_{t-i}+u_t$

**は5％水準で単位根が存在する帰無仮説を棄却できない。

TEGATA1, CD3ともI(1)変数であることが確かめられた。

つぎにEGテストに移ろう。

'$y_t=c+b_1x_t+w_t$、定数項を含む線形関係の検定

equation eqadf. LS CD3　c TEGATA1

結果は表8.5参照。

’ EGテストのための残差を求める、RES1と名付ける。

eqadf. makeresid res1

’ 残差のADF検定。定数項とトレンド項有り、ラグは4期とする

表8.5

Dependent Variable: CD 3
Method:Least Squares
Sample: 1985: 04 1998: 12
Included observations: 165

Variable	Coefficient	Std. Error	t–Statistic	Prob.
C	−0.067432	0.040047	−1.683796	0.0941
TEGATA　1	1.027205	0.009020	113.8811	0.0000

R–squared	0.987587	Mean dependent var	3.777988
Adjusted R–squared	0.987511	S.D. dependent var	2.474840
S.E. of regression	0.276570	Akaike info criterion	0.279341
Sum squared resid	12.46803	Schwarz criterion	0.316989
Log likelihood	−21.04567	F–statistic	12968.91
Durbin–Watson stat	1.001693	Prob（F–statistic）	0.000000

uroot (4) res１

結果はADF＝−4.032であった[21)]。

残差ベースのADFの共和分検定（residual–based ADF test for cointegration）を行うときも、EviewsはMcKinnonの臨界値を表示するが、この値はtable 20.1のものである。残差のような推計値に基づくデータに関するADF検定には、このEviewsの表示を用いることはできない。table 20.2の値による（変数が２個で、τ_cに該当するので５％水準の臨界値は−3.34である）。共和分が存在しないという帰無仮説は５％水準で棄却された。共和分は存在すると考えることができる。

（ECTとECM）

この時の長期関係は表8.５より、CD３の係数を１と基準化して、次のように与えられる（なおこの時t値は通常の意味を持たない）。

CD３＋0.0674−1.027TEGATA１

共和分関係が確かめられたので、短期関係のみならず長期関係を取り上げる。このres１に該当する共和分をモデルに加えるとき、それを誤差修正項（error correction term, ECT）という。モデルをエラー・コレクション・モデル（error correction model, ECM）という。

$$\triangle y_t = a + b_1 \triangle x_{t-1} + b_2 ECT_{t-1} + v_t \qquad 8.38)$$

で表される。より一般的には他の非確率的な説明変数やＩ(0)変数を含んだ（zと表記すると）形

$$\triangle y_t = a + b_1 \triangle x_{t-1} + b_2 ECT_{t-1} + b_3 z_t + v_t$$

に拡張することができる。ここでは

’$\triangle CD3_t = a + b_1 \triangle TEGATA1_{t-1} + b_2 RES1_{t-1} + v_t$

を考える。Eviewsのコマンドは次の通りである。

equation ECM. LS D（CD３）C D（TEGATA（−１））RES１（−１）

結果は次のようであった。

$$\underset{(-1.32)}{\triangle CD3_t = -0.021} \ \underset{(7.12)}{+0.0420} \triangle TEGATA1_{t-1}$$

$$\underset{(-1.22)}{-0.0828} RES1_{t-1} + v_t \qquad （　）内はt値$$

$AdjR^2 = 0.345$　SER＝0.200　DW＝2.086

ECTにかかるパラメータを送出ベクトルということがある。当然ながらこの変数は有意であることが期待されるが、上記のケースでは有意になっていない。CD３とTEGATA１を入れ替えて推計するEviewsのコマンドは次の通りである。

equation ECM. LS D （TEGATA１） C D（TEGATA１（−１））D（CD３（−１））RES１（−１）

結果は次のようであった。

$$\triangle TEGATA1_t = \underset{(-1.05)}{-0.0258} + \underset{(1.72)}{0.0193} \triangle TEGATA1_{t-1} + \underset{(0.42)}{0.051} \triangle CD3_{t-1}$$

$$\underset{(2.59)}{+0.2799} RES1_t + v_t \qquad （　）内はt値$$

$AdjR^2 = 0.053$　SER＝0.311　DW＝1.986

ECTにかかるパラメータは有意である。

（変数が３個以上の場合）

モデルの変数が３個以上のケースもある。そして共和分検定は変数が３個以上の場合に拡張することができる。このときも各変数が全てＩ(1)であることが望ましい。変数が６個以下で全ての変数がＩ(1)であれば、MacKinnonの臨界値が適用できる[22)]。

たとえば三つの変数（y_t、x_t、w_t）の関係が

$$y_t = a_0 + b_1 x_t + b_2 w_t + u_t \qquad 8.39)$$

であったとする。その三つの変数が全てＩ(1)であるとする。u_tがＩ(0)であれば、この三つの変数に

---

21) $y_t = c + b_1 x_t + w_t$の代わりに$x_t = d + ey_t + v_t$を考えよう。w_tがＩ(0)であればv_tもＩ(0)になる。しかし$x_t = d + ey_t + v_t$をOLSで推定し、EGテストを行うと$y_t = c + b_1 x_t + w_t$の場合と逆の効果が得られるケースがあることに注意する必要がある。TEGATA１を被説明変数にCD３を説明変数としたEGテストの結果（ラグ＝２）は−4.094であった。幸い、今回の結果はこの基準化に依存しない。

22) Engle–Granger検定を行う時、変数が６個以下である必要がある。変数が最大６個ということは、統計検定量の臨界値が変数６個までの場合しか作成されていないためである。

は共和分関係が存在する。

共和分関係が存在するかどうかを検定するために8.39）式をOLSで推計し

$\hat{u}_t = y_t - \hat{a}_0 - \hat{b}_1 x_t - \hat{b}_2 w_t$　8.40）

$\hat{u}_t$について残差ベースの共和分検定を行い、$u_t \sim I(0)$であればEGの方法により、

$\triangle y_t = c_0 + d_1 \triangle x_{t-1} + d_2 \triangle w_{t-1} + d_3 ECT_{t-1} + v_t$

$v_t \sim IID(0, \sigma^2)$　8.41）

を推計することができる[23]。ECT_tとしてu_tを利用すれば良い。

8.39）式の定式化が正しくて、三つの変数の間には共和分関係が存在するとする。この時定式化を誤って

$y_t = a + bx_t + e_t$　8.42）

を推定したとする。8.39）式と8.42）式を比較すると

$e_t = b_2 w_t + u_t$　8.43）

となる。問題の設定からw_tはI(1)の変数で、u_tはI(0)の変数である。8.39）式においてw_tが重要な説明変数（すなわち$b_2 \neq 0$）であれば、e_tはI(1)変数になる。

すなわち、回帰モデルの誤差項がI(1)となった場合、二つの解釈があり得る。一つはその回帰モデルは見せかけの回帰モデルであるということである。もう一つは回帰モデルから重要なI(1)変数が誤って除外されているということである。

モデルに含まれる変数が全てI(1)変数である。かつ共和分が１個のみ存在するとき、EGモデルを利用することができた。

しかし変数（mとする）が３個以上ある時、共和分は最大m－１個まで存在しうる。またI(1)変数とI(2)変数とが混在することがある。

まず、複数の共和分関係が存在するケースを見る。m＝４で次のような関係を考える。すなわちy_t、x_t、w_t、z_tはI(1)変数であるとする。

$y_t = a_0 + b_1 x_t + b_2 w_t + b_3 z_t + u_t \quad u_t \sim I(0)$　8.44）

という共和分関係が存在しうる。このケース以外にも

$y_t = c_0 + c_1 x_t + v_{1t} \quad v_{1t} \sim I(0)$　8.45）

$w_t = d_0 + d_1 z + v_{2t} \quad v_{2t} \sim I(0)$　8.46）

という共和分関係が存在しうる。この例では四変数の間に三つの共和分関係が存在する。この時8.44）式、8.45）式と8.46）式の係数の組み合わせ（定数項を除けば）

$(1, -b_1, -b_2, -b_3)$、$(1, -c_1, 0, 0)$、$(0, 0, 1, -d_1)$

を共和分ベクトル（cointegrating vector）という。しかしこの共和分ベクトルの線形結合も共和分ベクトルとして解釈できる。例えばv_{1t}とv_{2t}の線形結合

$v_t = v_{1t} + v_{2t} = y_t - c_0 - c_1 x_t + w_t - d_0 - d_1 z_t$　8.47）

もまたI(0)である。このとき8.44）式の共和分関係と8.47）式の共和分関係を区別することが問題となる。結果的に共和分関係が複数存在するとき、EGの二段階法を用いることはできない。仮に１個の共和分を見つけたとしても、それが8.44）式から得られた共和分ベクトルなのか、8.47）式から得られた共和分ベクトルなのかが明らかではないからである。

またm≧３の時はI(1)とI(2)変数の組合せの場合でも、変数が２個の場合と異なり、共和分が存在するケースがあり得る。

$x_t \sim I(1)$、$y_t \sim I(2)$、$z_t \sim I(2)$という３変数があるとする。このときy_tとz_t〜がI(1)となるような$\mathrm{e}_t = y_t - \mathrm{g} z_t$という線形結合があれば、$x_t$と$e_t$とが$\mathrm{v}_t = x_t - \mathrm{h} e_t \quad v_t \sim I(0)$となるようなhが存在する可能性があるからである。

ただしこの場合の臨界値はHaldrupによって与

23)　注20と同様な議論は8.41）式に適用ができる。

えられるものである。Ｉ⑴変数が１、Ｉ⑵変数が２個の時５％の臨界値は−4.09である。Ｉ⑴変数が２個、Ｉ⑵変数が１個の時は−4.15である。

このように複数の共和分ベクトルが存在するかどうか、仮に存在するとすれば何個存在するかを検定する方法がJohansenやJuseliusによって提案されている。

参考文献

山本拓［1988］『経済の時系列分析』創分社

Davidson, R. and J. MacKinnon［1993］*Estimation and Inference in Econometrics,* Oxford University Press