シリーズ

応用計量経済学⑾

横浜市立大学商学部　松浦　克己
大阪大学国際公共政策研究科　Colin McKenzie

第11章　質的選択モデルとTobitモデル

1　はじめに

（質的選択とは何か）

株式の需要を考えるとき、家計には株式を保有する（ダミー＝１）家計もあれば、株式を保有しない（ダミー＝０）家計もある。また消費税について、その増税に賛成する（ダミー＝１）人もいれば、賛成しない（ダミー＝０）人もいるだろう。このようにある経済主体が特定の行為を行う、行わないというケースが課題となることは多い。このような１またはゼロの選択に関するモデルを質的選択モデル（qualitative response model, QR）ということがある。あるいは１とゼロの離散変量であるので離散選択モデル（discrete choice model）ということもある（言い換えればダミー変数が被説明変数となるケースである）。

このような質的選択モデル分析の必要性に迫られることは、しばしば見受けられる。たとえば自動車の市場調査では、自動車を保有するかどうかは必ずといって良いほど質問されるだろう。世論調査では、ある政策に反対か賛成かは、当然のごとく設問に含まれるであろう。

また株式の需要について考える場合、株式を保有しないサンプル以外に100万円の株式を保有する人もいれば、１億円の株式を保有する人もいるであろう。このとき株式を保有する人については保有金額と様々な情報（たとえば所得や職業）を知ることができる。株式を所有しない人には所有しないということと所得や職業を知ることができる。需要を考えるときこのゼロ保有ということも有用な情報である。たとえば株式のマーケティングを考えるとき、誰がいくら株式を保有し、誰が保有しないかを考慮しない担当者はいないであろう。このとき需要はゼロで検閲されている（censored）という。このようなデータをセンサーされたデータ（censored　data）ということがある。その分析を考案したTobinにちなみトービット・モデル（tobit model）ということがある。

（個票データの利点と問題点）

質的選択モデルやトービット・モデルは大半の場合、アンケート調査など個々の家計や企業に対し行われた質問票を基に分析される。あるいは公開されている上場企業の財務データを用いて行われる。個別の家計や企業に対し調査されたデータの原本を個票データという。わが国の代表的な個票データとしては、家計調査、貯蓄動向調査、全国消費実態調査、国民生活基礎調査、就業構造基本調査などがある。これらは世界的にみても家計の行動を分析する上で貴重な情報を提供している。家計の消費関数、消費需要関数あるいは貯蓄関数、資産選択の分析、さらには家計の労働供給や出産行動にこれらの個票データは不可欠な情報源であ

る。

たとえば家計調査では、世帯主の年齢、性別、職業、（勤労者の場合の）勤め先の産業、企業規模、収入やその内訳を知ることができる。また世帯員についても同様の情報を得ることができる。その上で数百品目に関する消費支出が調査されている。家計の消費支出には世帯主の年齢、性別、職業、勤め先の産業、企業規模、収入等の家計の属性（attribute）が影響するであろう。それらを厳密に把握できるのは個票データだけであるといって良い。

またこのような個票データ（アンケート調査など）の収集は中央官庁だけではなく、地方自治体や民間企業によって広範囲に行われている。企業が収集しているものの一部は市販されている。

個票データはこのように貴重な情報源であるが、利用に当たっては留意も必要である。その第一点は信頼性の確保である。アンケートには無回答の項目（欠値、missing data）や思い違いで回答したと思われる項目がある[1)]。これらを処理する必要がある。たとえばタバコの消費需要関数の分析を試みたとする。世帯主の性別、年齢、職業、家族人員という家計構成の基本的な項目に一つでも無回答があれば、たとえ他の項目に回答していたとしても、そのサンプルの使用は中止することである。というのはこれらの家計属性の基本について回答がなされていない場合、他の項目の回答に信頼性があるとは考えられないからである。もちろん被説明変数や説明変数となる項目について無回答のものもサンプルから除くことになる（第７章参照）。

思い違いというのも、外部からは判断しにくいものである。回答の信頼性の確保の点からは、たとえば過小な消費支出のサンプルを除くことである。いかに節約をしたとしても１ヶ月３万円以下の消費支出で家計が生活できるとは思われない。そのサンプルも、他の項目の回答状況如何に関わらず、使用を中止することである。

企業の財務データを利用するのであれば、資本金、従業員、配当、売上げという企業の基本に関する項目が無回答となっているものも、サンプルから除く必要がある[2)]。

これの問題点を処理して、個票データを利用するならば、集計されたデータ（aggregated data）で行うことは困難な貴重な分析が行えるであろう。

２　プロビット・モデル、ロジット・モデル

2.1　OLSによる質的選択モデルの分析

まず被説明変数が１または０という質的選択モデルをOLSで推計することができるかどうかを考えてみよう[3)]。

$$y_i = a + bx_i + u_i \qquad 11.1)$$

$y_i = 1$　ある行為を選択する場合

$\phantom{y_i ={}} 0$　ある行為を選択しない場合

11.1）式をみると$y_i=1$の時$u_i=1-a-bx_i$となり、$y_i=0$の時$u_i=-a-bx_i$となるので、u_iは正規分布に従はない。$y_i=1$の確率$(P(y_i=1))$をf_iとして表記すると

$$E(u_i) = f_i(1-a-bx_i) + (1-f_i)(-a-bx_i) \qquad 11.2)$$

となる。$E(u_i)=0$になるためには$f_i=a+bx_i$が成り立つ必要がある。それを仮定すると

1）無回答（欠値）とゼロ回答は異なる。無回答はその項目（たとえば収入）について回答を拒否するものであるが、ゼロ回答は無収入という意味である。この欠値とゼロ回答を、入力の段階で厳密に区別しておく必要がある。

2）市販されている企業データの一部には、入力ミスと思われるものが混在していることがある。上場企業や金融・保険業で資本金、従業員、配当、売上げは当然に開示されている項目である。これらが無回答ということはあり得ない。これらの項目が無回答（欠値）となっている場合、それは入力ミスが疑われる。そのサンプルの使用はやめるべきである。その比率があまりに高ければデータセット自体の利用を差し控えた方がよい。

3）１または０の選択を、選択肢が二つであることから二値的選択モデル(binary choice model)ということがある。

$V(u_i)=f_i(1-f_i)$　11.3)

である。11.1) 式をOLSで推定するとaとbの不偏推定量が得られるが、11.3) 式より分かるように分散不均一性が存在するのでOLSはBLUEではない。

$E(u_i)=0$が成り立つのであれば11.1) 式のy_iの期待値は

$E[y_i]=a+bx_i$　11.4)

である。11.1) 式の被説明変数は1または0であるから、その期待値も0から1の範囲にとどまる。しかし11.1) 式をOLSで推定し、推定量を使用して11.4) 式の期待値を計算するとx_iの値によっては1を超えたり、負となることがある。これは質的選択モデルの期待値としては意味がない。このために質的選択モデルでOLSが用いられることはない。

2.2　プロビット・モデル、ロジット・モデルの考え方

11.1) 式の確率を求めるものと考え、その関数を

$P(y_i=1)=F(a+bx_i)$　11.5)

とする。11.5) 式から得られる確率が0から1の間となる必要がある。二つの選択しかないので

$P(y_i=1)+P(y_i=0)=1$

$P(y_i=0)=1-P(y_i=1)=1-F(a+bx_i)$　11.6)

である。E (y_i) を計算すると

$E(y_i)=(P(y_i=1)1)+(P(y_i=0)0)$

$=F(a+bx_i)$　11.7)

Fの関数として標準正規分布を選択し、

$P(y_i=1)=\Phi(a+bx_i)=\int_{-\infty}^{a+bxi}1/\sqrt{2\pi}\cdot\exp(-z^2/2)dz$　11.8)

ここでΦは標準正規分布関数を表すものとする。

11.6) 式と11.7) 式より

$P(y_i=0)=1-\Phi(a+bx_i)$　11.9)

$E(y_i)=\Phi(a+bx_i)$　11.10)

標準正規分布は0から1の範囲におさまるので、

$\lim_{z\to+\infty}\Phi(z)=1$、$\lim_{z\to-\infty}\Phi(z)=0$　11.11)

となる。これをプロビット・モデル (probit model) という。

Fの関数としてロジスチック分布 (logistic distribution) を選ぶと以下のようである。

$$P(y_i=1)=\Lambda(a+bx_i)=\frac{\exp(a+bx_i)}{1+\exp(a+bx_i)}$$　11.12)

ここでΛはロジスチック累積分布関数を表す。

11.6) 式と11.7) 式より

$$P(y_i=0)=\frac{1}{1+\exp(a+bx_i)}$$　11.13)

$E(y_i)=\Lambda(a+bx_i)$　11.14)

この時もFの値は0から1の間となる。これをロジット・モデル (logit model) という[4)]。

(尤度関数とマージナル効果)

ある行為を選択する (たとえば自動車を購入する) のは、その行為を選択しない場合 (自動車を購入しない) に比べて効用が高いからであろう。そうすると以下のような因子関数、指標関数 (index function model) を考えることができる。

$y_i^*=a+bx_i+u_i$　$u_i\sim iid(0,\ \sigma^2)$　11.15)

$y_i=1$　if $y_i^*>0$

$=0$　otherwise

この場合観測できる変数はy_iとx_iとなり、y_i^*を直接観測することはできない。このモデルを書き直すと

$P(y_i=1)P(y_i^*>0)=P(a+bx_i+u_i>0)$

$=P(u_i>-a-bx_i)$　11.16)

となる。正規分布やロジット分布は分布が対称で

4) プロビット・モデルとロジット・モデルのいずれを取るかが課題となりうるが、二値的選択モデルでは両者の差はほとんどないことが知られており、いずれによっても良い。

あるから

$P(y_i^* > 0) = P(u_i < a + bx_i) = F(a + bx_i)$ 11.16)′

となる。σで11.16）式を基準化すると

$P(y_i = 1) = P(u_i/\sigma > (-a - bx_i)/\sigma)$ 11.17)

となる。11.16)、11.16）式をプロビット・モデルとすれば

$P(y_i = 1) = \Phi((a + bx_i)/\sigma)$ 11.18)

となる。$P(y_i = 0)$は11.6）式より

$P(y_i = 0) = 1 - \Phi((a + bx_i)/\sigma)$ 11.18)'

で得ることができる。同時確率は尤度関数

$L = \Pi_{yi=1}\Phi((a + bx_i)/\sigma)$

$\Pi_{yi=0}(1 - \Phi((a + bx_i)/\sigma))$

で求められる（Πは積を表す)。計算の簡単化のために対数尤度関数を取ると

$\mathrm{LogL}_i = y_i \mathrm{Log}\Phi((a + bx_i)/\sigma) + (1 - y_i)$

$\mathrm{Log}(1 - \Phi((a + bx_i)/\sigma))$ 11.19)

$\mathrm{LogL} = \Sigma\,\mathrm{LogL}_i$ 11.20)

である。これを次式のように最大化することでパラメータが求められる[5)]。

$$\frac{\partial \mathrm{LogL}_i}{\partial a} = \frac{(y_i - \Phi(a + bx_i))}{\Phi(a + bx_i)(1 - \Phi(a + bx_i))}\phi(a + bx_i)$$

11.21)

$$\frac{\partial \mathrm{LogL}_i}{\partial b} = \frac{(y_i - \Phi(a + bx_i))}{\Phi(a + bx_i)(1 - \Phi(a + bx_i))}\phi(a + bx_i)x_i$$

11.22)

ここでφ（　）は標準正規密度関数

ロジット・モデルは11.19）式のΦをΛに置き換えることによって、同様に尤度関数を求めることができる。

プロビット・モデルやロジット・モデルの係数の符号は、それが正（負）であれば、当該変数は正（負）の影響を与えることを示している。しかしその影響の程度（弾性値や限界性向）を示すものではない。説明変数が連続型変数（正確にいうと微分可能な変数）か離散型変数によってマージナル効果（marginal effect）の計算方法は異なる。マージナル効果は次のように求められる。

まずプロビット・モデルを考えよう。11.10）式よりx_iが連続型変数であれば、

$$\frac{\partial E(y_i)}{\partial x_i} = \phi(a + bx_i)b \qquad 11.23)$$

で求められる。$1 > \phi(a + bx_i) \geqq 0$なのでマージナル効果の符号とbの符号は合致するが、マージナル効果の絶対値の方が小さい。離散型変数（例えばダミー変数）の場合11.23）式を適用することができない。モデルがダミー変数を含む

$y_i^* = a + b_1x_i + b_2\mathrm{Dummy}_i + u_i$

という形であれば、そのダミー変数の効果は

$\mathrm{Dummy}_i = 1$の場合$P(y_i = 1) = \Phi(a + b_1x_i + b_2)$

11.24a)

$\mathrm{Dummy}_i = 0$の場合$P(y_i = 1) = \Phi(a + b_1x_i)$

11.24b)

の差、

$\Phi(a + b_1x_i + b_2) - \Phi(a + b_1x_i)$ 11.24c)

として求められる。b_2が正（負）であればこの差も正（負）になる。

11.15）式のロジット・モデルを考えよう。x_iが連続型変数であればマージナル効果は、

$$p_i = \frac{\exp(a + bx_i)}{1 + \exp(a + bx_i)}$$

として11.14）式より

$$\frac{\partial E(y_i)}{\partial x_i} = p_i(1 - p_i)b \qquad 11.25)$$

で求められる。$1 \geqq p_i \geqq 0$と$1 > p_i(1 - p_i) \geqq 0$なので、マージナル効果の符号とbの符号は合致するが、マージナル効果の絶対値の方が小さい。ダミー変数の場合は、11.24）式のような形で計算することができる。

5）このモデルにおいてa、bとσを識別できないが、a/σ、b/σを識別できるのでσを1に基準化することが通常である。

また11.15）式のプロビットモデルの場合、ある説明変数(x)がx_iから$x_i+\Delta x_i$に変動したとき、選択確率に与える影響は

$$\Phi(a+b(x_i+\Delta x_i))-\Phi(a+bx_i) \qquad 11.26)$$

でみることができる。

（モデルの適合度）

質的選択モデルでは、通常推計された$\hat{F}_i=F(\hat{a}+\hat{b}x_i)>0.5$であれば$\hat{y}_i=1$、$\hat{F}_i\leqq 0.5$であれば$\hat{y}_i=0$として扱う。現実に観察される$y_i$は１か０であるが、推計された確率が１または０となることはほとんど有りそうにないので、このように考える。

質的選択モデルの適合度として最も簡明なのは、現実に観察されるy_i（１または０）と推計された$\hat{F}_i$から得られた$\hat{y}_i$（１または０）の比較を行うことである。

たとえばサンプルが100個であるとする。現実にy_iが１であるものが60個、０であるものが40個であるとする。そのとき推計された$\hat{y}_i$で１となるものが55個（実際にも１であるものが45個、実際には０であるものが10個であったとする）、０となるものが45個（実際にも０であるものが30個、実際には１であるもの15個）がであったとする。次のように整理することができる。

		推計された値 1	0	
現実の値	1	45	15	60
	0	10	30	40
		55	45	100

正しく予測された割合は、現実に１であるものについて45/60、現実に０であるものについて30/40、両者の合計では75/100である。これをモデルの適合度とするのが一つの方法である。

もう一つの方法はMcFaddenによって提唱されたMcFaddenのR^2、あるいは尤度比指標といわれるものである。定数項のみからなるモデル（言い換えれば説明変数にゼロ制約を加えているモデル）から得られる対数尤度を$LogL_r$とし、制約のないモデルから得られる対数尤度を$LogL_u$とする。

$$\text{McFaddenの}R^2=1-\frac{LogL_u}{LogL_r} \qquad 11.27)$$

で求められる。ここで$LogL_u\geqq LogL_r$である。モデルが全く説明力がない（定数項以外の全ての係数が０であるという帰無仮説が棄却できないケース）であれば11.27）式は０となる。ただしMcFaddenのR^2はOLSの決定係数とは全く意味が異なることに留意する必要がある。

３　Eviewsでのプロビット・モデル、ロジット・モデルの推定例

Eviewsでプロビット・モデルやロジット・モデルを推定する場合は、OLSのようにコマンドで行うことができる。また自分で尤度関数を書く形でも行うことができる。ここではコマンドによる形で行ってみる。

女性の就業関数について考える。女性の就業確率は夫の賃金が高くなると、留保賃金の水準が高くなるので、低下することが知られている。また幼児がいると低下することも知られている。これを全国消費実態調査を用い、20歳から59歳の女性についてみてみよう（なお信頼性確保のため過少消費などのサンプルはあらかじめ除いてある）。所得、金融資産、負債は対数値（都道府県別物価指数で実質化した）である。

（プロビット・モデルの推計例）

1　workfile c：\data\ework u　1 40000

2　smpl 1　34246

'就業の有（＝１）無（＝０）夫の収入とその自乗、他の世帯員の収入とその自乗

3　read c：\data\work2.txt work husin husin2 othin othin2

'年齢、自乗、金融資産　持ち家ダミー　負債

4　read c：\data\work3.txt age age2 money mochiya debt

'幼児の有無ダミー、母親同居ダミー、都道府県別IIP、有効求人倍率

'夫無しダミー

5　read c：\data\work4.txt infant mom iip yukou husnasi

'金融資産の変化の影響をみるために50%増の変数を作っておく

6　series monplus＝@mean(money)*1.5

'論文報告のための記述統計量作成

7　group group1 work husin age age2 money mochiya debt infant mom iip yukou husnasi

8　group1.stats

'$work^* = c + a_1 husin + a_2 age + a_3 age^2 + a_4 money + a_5 mochiya + a_6 debt + a_7 infant + a_8 mom + a_9 iip + a_{10} yukou$ '$+ a_{11} husnasi + e_i$　をProbit　Modelで推計するコマンド

'binaryが二値的選択モデルを推計するコマンドである（OLSのLSに相当）。

9　equation eq1.binary work c husin age age 2 money mochiya debt infnat mom iip yukou husnasi

'予測値を保存する

10　eq1.fit pwfit

'Marginal Effectsの計算

'夫の収入のMarginal　Effectsの計算（11.23）式を参考に

'φ(XB)を@dnorm(XB)で計算、平均値の回りで評価する[6)]

11　series　marxb1＝@dnorm(@coefs(1)＋@coefs(2)*@mean(husin)＋@coefs(3)*@mean(age)＋@coefs(4)*@mean(age2)＋@coefs(5)*@mean(money)＋@coefs(6)*@mean(mochiya)＋@coefs(7)*@mean(debt)＋@coefs(8)*@mean(infant)＋@coefs(9)*@mean(mom)＋@coefs(10)*@mean(iip)＋@coefs(11)*@mean(yukou)＋@coefs(12)'@mean(husnasi))*@coefs(2)

'Medianの回りで評価する場合

12　series　xbmed＝@dnorm(@coefs(1)＋@coefs(2)*@median(husin)＋@coefs(3)*@median(age)＋@coefs(4)*@median(age2)＋@coefs(5)*@median(money)＋@coefs(6)*@median(mochiya)＋@coefs(7)*@median(debt)＋@coefs(8)*@median(infant)＋@coefs(9)*@median(mom)＋@coefs(10)*@median(iip)＋@coefs(11)*@median(yukou)＋@coefs(12)*@median(husnasi))*@coefs(2)

'ダミー変数(幼児の有無)のMarginal　Effects（11.24）式を参考に）

'Φ(XB)の計算、幼児有りのケース

13　series　xbd1＝@cnorm(@coefs(1)＋@coefs(2)*@mean(husin)＋@coefs(3)*@mean(age)+@coefs(4)*@mean(age2)＋@coefs(5)*@mean(money)＋@coefs(6)*@mean(mochiya)＋@coefs(7)*@miean(debt)+@coefs(8)＋@coefs(9)*@mean(mom)＋@coefs(10)*@mean(iip)＋@coefs(11)*@mean(yukou)＋@coefs(12)*@mean(husnasi))

'Φ(XB)の計算、幼児無しのケース

14　series　xbd0＝@cnorm(@coefs(1)＋@coefs(2)*@mean(husin)＋@coefs(3)*@mean(age)＋@coefs(4)*@mean(age2)＋@coefs(5)*@mean(money)＋@coefs(6)*@

6）**series**は**scalar**で本来よいが画面表示を容易にするためにseriesにしてある。

```
mean(mochiya)+@coefs(7)*@mean
(debt)+@coefs(9)*@mean(mom)+@co-
efs(10)*@mean(iip)+@coefs(11)*@mean
(yukou)+@coefs(12)*@mean(husnasi))
```
'幼児有りダミーのMariginal Effects

```
15 series maryouji=xbd1−xbd0
```
'金融資産の変化の効果（11.26）式を参考に

'金融資産が増加した場合の確率

```
16 series xbplus=@cnorm(@coefs(1)+@co-
   efs(2)*@mean(husin)+@coefs(3)*@
   mean(age)+@coefs(4)*@mean(age2)+
   @coefs(5)*monplus+@coefs(6)*@mean
   (mochiya)+@coefs(7)*@mean(debt)+@
   coefs(8)*@mean(infant)+@coefs(9)*@
   mean(mom)+@coefs(10)*@mean(iip)+
   @coefs(11)*@mean(yukou)+@coefs(12)*
   @mean(husnasi))
```
'平均値の回りでの確率

```
16 series xb=@cnorm(@coefs(1)+@coefs
   (2)*@mean(husin)+@coefs(3)*@mean
   (age)+@coefs(4)*@mean(age2)+@coefs
   (5)*@mean(money)+@coefs(6)*@mean
   (mochiya)+@coefs(7)*@mean(debt)+@
   coefs(8)*@mean(infant)+@coefs(9)*@
   mean(mom)+@coefs(10)*@mean(iip)+@
   coefs(11)*@mean(yukou)+@coefs(12)*
   @mean(husnasi))
```
'金融資産増加による確率の変化

```
17 series henka=xbplus−xb
```

プロビットモデルの推計結果は表11.1に掲げるとおりである。

夫の収入（HUSIN）は1%水準で有意に負である。幼児有りダミー（INFANT）も1%水準で有意に負である。符号条件を充たしていること

表11.1

Dependent Variable：WORK
Method：ML-Binary Probit
Date：12/21/99 Time：10：53
Sample：1 34246
Included observations：34246
Convergence achieved after 7 iterations
Covariance matrix computed using second derivatives

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	−1.349776	0.179679	−7.512144	0.0000
HUSIN	−0.012874	0.003045	−4.227270	0.0000
AGE	0.083548	0.007344	11.37598	0.0000
AGE2	−0.001155	8.64E-05	−13.36311	0.0000
MONEY	−0.027060	0.004517	−5.990598	0.0000
MOCHIYA	0.046752	0.019076	2.450842	0.0143
DEBT	0.030365	0.002512	12.08599	0.0000
INFANT	−0.918258	0.023324	−39.36938	0.0000
MOM	0.341694	0.020398	16.75134	0.0000
IIP	−0.002505	0.001161	−2.158646	0.0309
YUKOU	0.739655	0.031019	23.84555	0.0000
HUSNASI	0.978617	0.047521	20.59325	0.0000

Mean dependent var	0.510804	S.D. dependent var	0.499891
S.E. of regression	0.461713	Akaike info criterion	1.228029
Sum squared resid	7297.976	Schwarz criterion	1.230987
Log likelihood	−21015.54	Hannan-Quinn criter.	1.228972
Restr. log likelihood	−23729.52	Avg. log likelihood	−0.613664
LR statistic（11df）	5427.969	McFadden R-squared	0.114372
Probability（LR stat）	0.000000		
Obs with Dep＝0	16753	Total obs	134246
Obs with Dep＝1	17493		

が分かる。IIPと有効求人倍率は符号（YUKOU）が逆転していることが注目される[7)]。

表の下欄に対数尤度（Log likelihood −21015.54）が表示されている。この対数尤度は論文では必ず報告する。McFaddenのR^2(0.114)も表示されている(これは報告されないことがある)。

平均値の回りでの夫の収入のマージナル効果（marxb1）は−0.00513であった。メディアンの回りでのマージナル効果（xbmed）は−0.005105であった。夫の収入の1単位の増加は約0.5%女性の就業確率を低下させていることになる。なおマージナル効果の値を報告する時は、それがどの水準（平均かメディアンか等）により計

7）プロビット・モデル等最尤法で推計した場合、Eviewsはt値をz-Statisticと表示する。これは検定が大標本に基づく漸近的なものであることを示すためである。このときt値を漸近的t値ということがある。

算されたものか報告する必要がある。この場合は大きな差がなかったが、変数によってはかなり異なることがあるからである。

幼児がいる場合の女性の就業確率（xbd１）は0.2360であった。幼児がいない場合の就業確率（xbd０）は0.5789であった。したがって幼児の女性の就業確率に与えるマージナル効果（mary-ouji）は－0.3429となる。幼児がいると女性の就業確率は34.3%も低下する。女性の就業に育児が重要な課題となっていることが分かる。

金融資産が平均より50%増加したときの就業確率（xbplus）は0.4807である。平均値の回りでの就業確率（xb）は0.5139である。金融資産が50%増加すると就業確率（henka）は－0.0332低下する。

表11.１の下の方をみると総標本数は34,236人で就業する女性（被説明変数が１）は17,493人に対して就業しない女性（被説明変数が０）は16,753人である。ここで推定したモデルはどの程度適合しているかをみてみる。

View/Expectation-Prediction Tableを選択する。**cutoff value**が既定値の0.5で表示されている。それを選択する。結果は表11.２のとおりである。

０を０と正しく識別したものが10,120(60.41%)、０を１と誤ったものが6,633(39.59%）である。１を正しく１と識別したものが12,030(68.77%)、０と誤ったのが5,463(31.23%）で両者合計で22,150(64.68%）が正しく識別されている。

(ロジット・モデルの推定例)

ロジット・モデルもプロビット・モデルとほぼ同様である。オプションとして（D=L）を加えればよい。

表11.２

Dependent Variable：WORK
Method：ML-Binary Probit
Sample：1 34246
Included observations：34246
Prediction Evaluation（success cutoff C=0.5）

	Estimated Equation			Constant Probability		
	Dep=0	Dep=1	Total	Dep=0	Dep=1	Total
P(Dep=1)<=C	10120	5463	15583	0	0	0
P(Dep=1)>C	6633	12030	18663	16753	17493	34246
Total	16753	17493	34246	16753	17493	34246
Correct	10120	12030	22150	0	17493	17493
% Correct	60.41	68.77	64.68	0.00	100.00	51.08
% Incorrect	39.59	31.23	35.32	100.00	0.00	48.92
Total Gain*	60.41	−31.23	13.60			
Percent Gain**	60.41	NA	27.80			

	Estimated Equation			Constant Probability		
	Dep=0	Dep=1	Total	Dep=0	Dep=1	Total
E(# of Dep=0)	9450.78	7306.43	16757.21	8195.50	8557.50	16753.00
E(# of Dep=1)	7302.22	10186.57	17488.79	8557.50	8935.50	17493.00
Total	16753.00	17493.00	34246.00	16753.00	17493.00	34246.00
Correct	9450.78	10186.57	19637.35	8195.50	8935.50	17131.00
% Correct	56.41	58.23	57.34	48.92	51.08	50.02
% Incorrect	43.59	41.77	42.66	51.08	48.92	49.98
Total Gain*	7.49	7.15	7.32			
Percent Gain**	14.67	14.62	14.64			

*Change in "% Correct" from default（constant probability）specification
**Percent of incorrect（default）prediction corrected by equation

'Logit Modelの推計コマンド

equation eq2.binary(d=l) work c husin age age2 money mochiya debt infant mom iip yukou husnasi

'予測値の保存

eq2.fit lwfit

'XBの計算

series marxb1=@coefs(1)+@coefs(2)*@mean(husin)+@coefs(3)*@mean(age)+@coefs(4)*@mean(age2)+@coefs(5)*@mean(money)+@coefs(6)*@mean(mochiya)+@coefs(7)*@mean(debt)+@coefs(8)*@mean(infant)+@coefs(9)*@mean(mom)+@coefs(10)*@mean(iip)+@coefs(11)*@mean(yukou)+@coefs(12)*@mean(husnasi)

'p(XB)の計算

series pr=exp(marxb1)/(1+exp(marxb1))

'夫の収入のMarginal Effects（11.25）式を参考に）

series marlogit=pr*(1-pr)*@coefs(2)

推計結果は表11.3に掲げるとおりである。

ロジット・モデルでの夫の収入のマージナル効果は−0.005436である。

ここでプロビット・モデルの予測値（PWFIT）とロジット・モデルの予測値（LWFIT）を最初の50サンプルを取り出して比較してみよう（図11.1参照）。両者はほとんど差がないことが分かる。

表11.3

Dependent Variable：WORK
Method：ML-Binary Logit
Sample：1 34246
Included observations： 34246
Convergence achieved after 7 iterations
Covariance matrix computed using second derivatives

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	−2.313815	0.297069	−7.788812	0.0000
HUSIN	−0.021403	0.004915	−4.354225	0.0000
AGE	0.141769	0.012184	11.63544	0.0000
AGE2	−0.001941	0.000143	−13.54806	0.0000
MONEY	−0.044682	0.007486	−5.969084	0.0000
MOCHIYA	0.082823	0.031440	2.634317	0.0084
DEBT	0.050417	0.004130	12.20825	0.0000
INFANT	−1.494029	0.039242	−38.07241	0.0000
MOM	0.556291	0.033687	16.51334	0.0000
IIP	−0.004323	0.001909	−2.264480	0.0235
YUKOU	1.217896	0.051375	23.70621	0.0000
HUSNASI	1.680335	0.081226	20.68716	0.0000

Mean dependent var	0.510804	S.D. dependent var	0.499891
S.E. of regression	0.461670	Akaike info criterion	1.227734
Sum squared resid	7296.599	Schwarz criterion	1.230692
Log likelihood	−21010.49	Hannan-Quinn criter.	1.228677
Restr. log likelihood	−23729.52	Avg. log likelihood	−0.613517
LR statistic (11 df)	5438.062	McFadden R-squared	0.114584
Probability(LR stat)	0.000000		
Obs with Dep=0	16753	Total obs	34246
Obs with Dep=1	17493		

4　分散不均一、過小定式化

（分散不均一の問題）

プロビット・モデルやロジット・モデルで分散不均一や過小定式化の誤りがあるときは、その推定量には一致性もないことがYatchewやGrilichesによって指摘されている。

個票データを使う質的選択モデルでは、特に分散不均一は深刻な課題となることがある。11.18）式で

$P(y_i=1)=\Phi((a+bx_i)/\sigma)$

を考えた。分散が不均一であればσはσ_iとなる。推計すべきパラメータはサンプルの数＋説明変数＋1（定数項）となるので、何らかの制約を加えない限り、これを推定することはできない。

HarveyやGreeneは

$V(u_i)=\sigma_i^2=\exp(cz_i)^2$

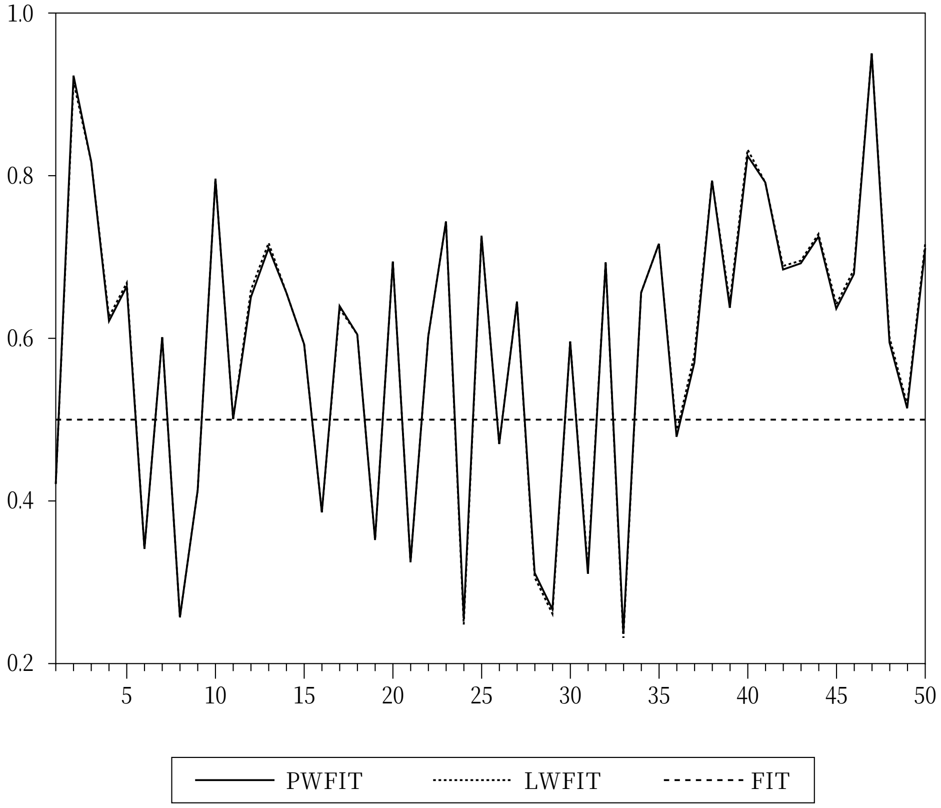
という一般型を提案している[8]。このときモデルは

$y_i^*=a+bx_i+u_i$　　11.27a）

$V(u_i)=\exp(cz_i)^2$　　11.27b）

8）第4章で触れたように、z_iとしてどの変数を利用すれば良いかという問題は難しいものがある。

図11.1



となる。対数尤度関数は次式により得られる。

$$\mathrm{LogL}=\Sigma\{(y_i \mathrm{Log}\Phi((a+bx_i)/\exp(cz_i))+(1-y_i)\mathrm{Log}(1-\Phi((a+bx_i)/\exp(cz_i)))\} \quad 11.28)$$

パラメータは以下のように求められる。

$$\frac{\partial \mathrm{LogL}}{\partial a}=\Sigma\left[\frac{\phi\{(a+bx_i)/\exp(cz_i)\}\{y_i-\Phi((a+bx_i)/\exp(cz_i))\}}{\Phi\{(a+bx_i)/\exp(cz_i)\}\{1-\Phi((a+bx_i)/\exp(cz_i))\}}\right]\times\exp(-cz_i) \quad 11.29a)$$

$$\frac{\partial \mathrm{LogL}}{\partial b}=\Sigma\left[\frac{\phi\{(a+bx_i)/\exp(cz_i)\}\{y_i-\Phi((a+bx_i)/\exp(cz_i))\}}{\Phi\{(a+bx_i)/\exp(cz_i)\}\{1-\Phi((a+bx_i)/\exp(cz_i))\}}\right]\times\exp(-cz_i)x_i \quad 11.29b)$$

$$\frac{\partial \mathrm{LogL}}{\partial c}=\Sigma\left[\frac{\phi\{(a+bx_i)/\exp(cz_i)\}\{y_i-\Phi((a+bx_i)/\exp(cz_i))\}}{\Phi\{(a+bx_i)/\exp(cz_i)\}\{1-\Phi((a+bx_i)/\exp(cz_i))\}}\right]\times\exp(-cz_i)zi(-a-bx_i) \quad 11.29c)$$

分散が均一であればc＝０である。分散が均一であるという帰無仮説H_0：c＝０と対立仮説H_1:c≠０に関して尤度比検定やWald検定を行えばよい。

モデルの定式化が正しいにも関わらず分散不均一が存在する場合の修正としては、OLSの分散不均一の修正のアナロジーであるWhiteの提案した修正方法がある[9]。

分散不均一は過小定式化の時にしばしば起きることが知られている。これも除外変数テストの考え方を用い、次のような制約のないモデルと制約のあるモデルを考え、

$y^*_i=a+b_1x_{1i}+b_2x_{2i}+u_i$　対数尤度をLogL_uとする

$y^*_i=a+b_1x_{1i}+e_i$　対数尤度をLogL_rとする

$$LR=-2(\mathrm{LogL}_r-\mathrm{LogL}_u) \quad 11.30)$$

の尤度比検定を行えばよい。これが制約の数を自由度とするχ^2分布に従う。

９）quasi-maximum likelihood（QMLE）ということがある。OLSの場合第４章を参照。

（Eviewsでの推定例）

$$work^*_i = a_1 + a_2 husin_i + a_3 infant_i + a_4 money_i + a_5 debt_i + u_i \quad 11.31)$$

をプロビット・モデルで推計した。結果は次のようであった（なおプロビットモデルの報告は通例以下のように行う）。

$$\underset{(22.75)}{work^*_i = 0.747} \ \underset{(-25.22)}{-0.0445 husin_i} \ \underset{(-43.69)}{-0.854 infant_i}$$

$$\underset{(-7.51)}{-0.0320 money_i} \ \underset{(16.62)}{+0.0382 debt_i} + \hat{u}_i$$

N＝34246　POSITIVE SAMPLES　17493

カッコ内は漸近的t値 LogL＝－22102.59

表11.1をみるとその対数尤度は－21015.54である。

これから尤度比検定統計量＝－2*(－22102.59＋21015.54)＝2194.1である。自由度8のχ^2の臨界値（5％）は15.51である。表11.1の結果から容易に予想されるように、8個の変数を除いた11.31）式のモデルは過小定式化ということになる。

11.31）式について分散不均一を考える。その候補としてhusin（夫の収入）をここでは取り上げよう。11.27）式を推定するためには、EviewsではLog Likelihood Object(LogL）で関数型を指定する必要がある。ここではそれを試みる。

'分散は均一という帰無仮説の下での推計

1　equation eq3.binary work c husin infant money debt

'帰無仮説（eq3）の5個の係数を尤度関数の初期値に使うためにalphaと名付けて保存[10)]

2　coef(5) alpha＝eq3.@coefs

'exp（c*husin）の係数をgamと名付け初期値を－0.1とする。

3　coef(1) gam＝－0.1

'尤度関数の特定化

'LogLであることを宣言。名前をll1とする（ここに結果が保存される）。

4　logl ll1

'対数尤度を最大化するための要素をlogl1と名付けることを宣言する。

5　ll1.append @logl logl1

'$(a+bx_i)/exp(cz_i)$を作成。

6　ll1.append　index＝(alpha(1)＋alpha(2)*husin＋alpha(3)*infant＋alpha(4)*money＋alpha(5)*debt)/exp(gam(1)*husin)

'11.29a)、11.29b) 11.29c）式のΣ［　］の中の部分を作成。

7　ll1.append　mills＝@dnorm(index)*(work－@cnorm(index))/(@cnorm(index)*(1－@cnorm(index)))

'11.28）式の対数尤度関数を指定

8　ll1.append　logl1＝work*log(@cnorm(index))＋(1－work)*log(1－@cnorm(index))

'数値解析方法を指定（@deriv)。11.29a)、11.29b)、11.29c）式より説明変数のパラメータ毎に指定する。

9　ll1.append　@deriv　alpha(1)　grad1　alpha(2)　grad2　alpha(3)　grad3　alpha(4)　grad4　alpha(5)　grad5 gam(1)　grad6

'11.29a）式の計算

10　ll1.append　grad1＝mills/exp(gam(1)*husin)

'11.29b）式の計算

11　ll1.append grad2＝grad1*husin

12　ll1.append grad3＝grad1*infant

13　ll1.append grad4＝grad1*money

14　ll1.append grad5＝grad1*debt

10）尤度関数のプログラムを独自に書くケースでは、初期値の設定は必ず行った方がよい。また初期値の設定を誤ると関数が収束しないことがある。その初期値にはbinaryのコマンドで推計したプロビット・モデルやOLSの推計結果を用いるとよい。

表11．4

LogL：LL1				
Method：Maximum Likelihood（Marquardt）				
Sample：1 34246				
Included observations：34246				
Evaluation order：By observation				
Initial Values：ALPHA(1)＝0.74749，ALPHA(2)＝－0.04446，ALPHA(3)＝－0.85424，ALPHA(4)＝－0.03199，ALPHA(5)＝0.03821，GAM(1)＝－0.10000				
Convergence achieved after 12 iterations				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
ALPHA(1)	0.539345	0.020331	26.52780	0.0000
ALPHA(2)	－0.042740	0.001607	－26.59215	0.0000
ALPHA(3)	－0.054734	0.002659	－20.58738	0.0000
ALPHA(4)	0.001122	0.000257	4.364080	0.0000
ALPHA(5)	0.002808	0.000177	15.82457	0.0000
GAM(1)	－0.227211	0.003663	－62.03499	0.0000
Log likelihood	－21576.64	Akaike info criterion		1.260447
Avg. log likelihood	－0.630049	Schwarz criterion		1.261926
Number of Coefs.		Hannan-Quinn criter.		1.260919

'11.29c）式の計算

15 ll1.append grad6＝mills*husin*(－index)

'最尤法を実施する（MLがそのコマンドである）。

16 ll1.ml（d）

'結果を表示する（表11．4参照）

17 show ll1.output

gam(1)のt値は－62.03でp値は0.0000である。gam(1)＝０のWald検定を**Views/Wald Coefficient Tests**で行うと結果は3848.34であった。11.31）式の結果との尤度比検定は1051.9である。分散均一という帰無仮説は強く棄却される。これは過小定式化による影響が現れていると考えられる。このケースでは定式化を改めない限り問題は解決しないであろう。

ここでは定式化は正しいものとしてWhiteの修正方法の例を示す。オプションとして**h**を加えてやればよい。

equation eqh．binary（h）work c husin infant money debt

結果は次のようであった。

$$\underset{}{work_i^*} = \underset{(22.93)}{0.747} \underset{(-24.79)}{-0.0445husin_i} \underset{(-43.65)}{-0.854infant_i}$$

$$\underset{(-7.36)}{-0.0320money_i} \underset{(16.54)}{+0.0382debt_i} + \hat{u}_i$$

カッコ内はWhiteの修正による漸近的t値である。

N＝34246　POSITIVE SAMPLES　17493

LogL＝－22102.59

5　被説明変数に制約のあるモデル

ある値以上取る場合に観察されるデータがある（株式を保有する場合の保有金額は０を超える場合に観察される。ゼロ保有世帯は０ということが分かるだけである）。逆にある値以下を取る場合に観察されるケースもある（低所得者を対象に所得を調査する場合、高所得者の所得は調査されない）。さらにはある範囲を取る場合に観察されるケースもある（たとえば試験の成績が60点以上80点以下の学生を調べるとき。81点以上や59点以下の学生の成績は調査されない）。これらを被説明変数とするとき（たとえば株式保有金額）、それは下限がゼロで制約されている。このようにセンサーされたデータ（censored data）を被説明変数とするとき、それをlimited dependent variableという。

これはアンケート調査などでよく見られる事態である。株式を保有するかどうか、保有するならばいくら保有するのかというようなケースである。このような分析をcensored regression model、あるいはトービット・モデル（tobit model、Tobinのprobit）という。

トービット・モデルはランダムサンプルから選ばれ、それがある値（閾値）で実数とゼロとに区分されるが、データによっては株式を保有する世帯だけを対称にしているものもある。このようなケースも多いであろう（たとえば大学生のいる家計だけに大学教育費用を聞く場合）。このような

データを切断されたデータ（truncated data）といい、それを被説明変数とするとき切断分布モデル（truncated regression model）という。

5.1　切断分布モデル

y^*が平均がa、分散σ^2の正規分布に従うとする。閾値cを超えるデータのみが集められて分析対象となったとする。y^*がcを超える確率は

$$P(y^*>c)=1-\Phi\left(\frac{c-a}{\sigma}\right) \qquad 11.32)$$

で求められる。確率密度関数f（　）は

$$f(y^* \mid y^*>c)=\frac{1/\sigma \cdot \phi((y^*-a)/\sigma)}{1-\Phi((c-a)/\sigma)} \qquad 11.33)$$

で求められる[11]。表記の簡単化のために$(c-a)/\sigma=d$とする。期待値は次による。

$$E(y^* \mid y^*>c)=\int_c^\infty y^* f(y^* \mid y^*>c)dy^*$$
$$=a+\sigma\phi(d)/(1-\Phi(d)) \qquad 11.34)^{12)}$$

分散は次のようである。

$$V(y^* \mid y^*>c)=\sigma^2-\sigma^2\{(\phi(d)/(1-\Phi(d)))\cdot((\phi(d)/(1-\Phi(d)))-d)\} \qquad 11.35)$$

閾値cを超えるデータのみからなる切断分布モデルの回帰を考えてみよう。

$$y_i^*=a+bx_i+u_i \quad u_i\sim niid(0,\sigma^2) \qquad 11.36)$$

$y_i^*>c$のデータしか観測されないのでこの場合

$$E(u_i \mid y_i^*>c)=E(u_i \mid a+bx_i+u_i>c)$$
$$=E(u_i \mid u_i>c-a-bx_i) \qquad 11.37)$$

11.34）式の結果より

$$E(u_i \mid u_i>c-a-bx_i)\neq 0$$

なので$y_i^*>c$を充たすデータのみを使用し、11.36）式をOLSで推定するとOLS推定量は不偏性は持たない。

11.33）式より11.36）式の対数尤度関数は次の通りとなる（nはサンプル数）。

$$LogL=-(n/2)Log(2\pi)-(n/2)Log\sigma^2-(1/(2\sigma^2))\Sigma(y_i^*-a-bx_i)^2-\Sigma Log(1-\Phi(d_i)) \qquad 11.38)$$

ここで再び$d_i=(c-a-bx_i)/\sigma$と置くと1階の条件は次の通りである[13]。

$$\frac{\partial LogL}{\partial a}=\frac{1}{\sigma^2}\Sigma(y_i^*-a-bx_i)+\Sigma\frac{\phi(d_i)}{(1-\Phi(d_i))\sigma}=0 \qquad 11.39a)$$

$$\frac{\partial LogL}{\partial b}=\frac{1}{\sigma^2}\Sigma(y_i^*-a-bx_i)x_i+\Sigma\frac{\phi(d_i)x_i}{(1-\Phi(d_i))\sigma}=0 \qquad 11.39b)$$

$$\frac{\partial LogL}{\partial \sigma^2}=\frac{-n}{2\sigma^2}+\Sigma(y_i^*-a-bx_i)^2-\frac{1}{2\sigma^2}\Sigma\frac{\phi(d_i)d_i}{1-\Phi(d_i)}=0 \qquad 11.39c)$$

5.2　トービット・モデル

ランダムサンプルで市場調査を行えば、その中には財・サービスを購入した人もいれば購入していない人もいる。両者を合わせて分析する（この点で切断分布モデルと異なる）。財・サービスの

11）cを下回るデータのみが集められているとすると密度関数等は以下のようである。

$$f(y^* \mid y^*<c)=\frac{1/\sigma \cdot \phi((y^*-a)/\sigma)}{\Phi((c-a)/\sigma)} \qquad s1)$$

$$E(y^* \mid y^*<c)=a-\sigma\phi(d)/\Phi(d) \qquad s2)$$

$$V(y^* \mid y^*<c)=\sigma^2-\sigma^2(\phi(d)d/\Phi(d)+\phi(d)^2/\Phi(d)^2) \qquad s3)$$

12）11.34）式の$\phi(d)/(1-\Phi(d))$、s2）式の$-\Phi(d)/\Phi(d)$をミルズの比率の逆数（inverse Mills ratio）という。

13）cを下回るデータのみが集められている場合はs1）式より以下の通りである。

$$LogL=-(n/2)Log(2\pi)-(n/2)Log\sigma^2-(1/(2\sigma^2))\Sigma(y_i^*-a-bx_i)2-\Sigma Log\Phi(d_i) \qquad s4)$$

$$\frac{\partial LogL}{\partial a}=\frac{1}{\sigma^2}\Sigma(y_i^*-a-bx_i)+\Sigma\frac{\phi(d_i)}{\Phi(d_i)\sigma}=0 \qquad s5)$$

$$\frac{\partial LogL}{\partial b}=\frac{1}{\sigma^2}\Sigma(y_i^*-a-bx_i)x_i+\Sigma\frac{\phi(d_i)x_i}{\Phi(d_i)\sigma}=0 \qquad s6)$$

$$\frac{\partial LogL}{\partial \sigma^2}=\frac{-n}{2\sigma^2}+\frac{\Sigma(y_i^*-a-bx_i)^2}{2\sigma^4}+\frac{1}{2\sigma^2}\Sigma\frac{\phi(d_i)d_i}{\Phi(d_i)}=0 \qquad s7)$$

購入で支払った金額（連続変数）を知ることができればその金額についても分析する（この点で質的選択モデルと異なる)。これがトービット・モデルの例である。

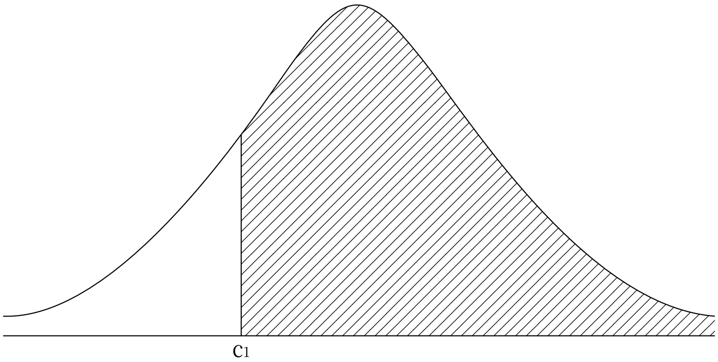
データには上限で区切られているもの、下限で区切られているもの、上限・下限の両側で区切られているものがある（図11. 2参照)。

トービット・モデルはプロビット・モデル、ロジット・モデルや切断分布モデルの延長線上で考えることができる。その簡単な例をみてみよう。

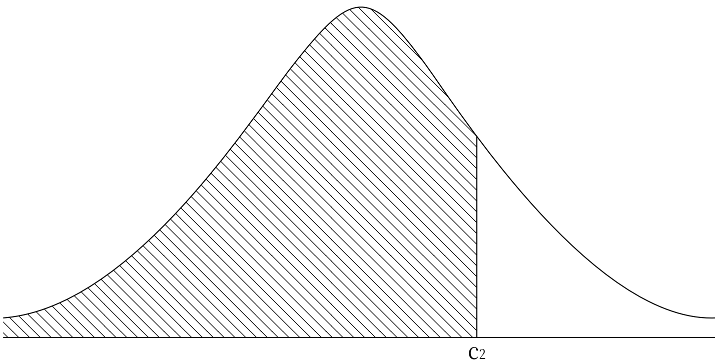
$$y_i^* = a + bx_i + u_i \quad u_i \sim N(0, \sigma^2) \qquad 11.40)$$[14]

$$y_i = y_i^* \quad \text{if} \quad y_i^* > 0$$

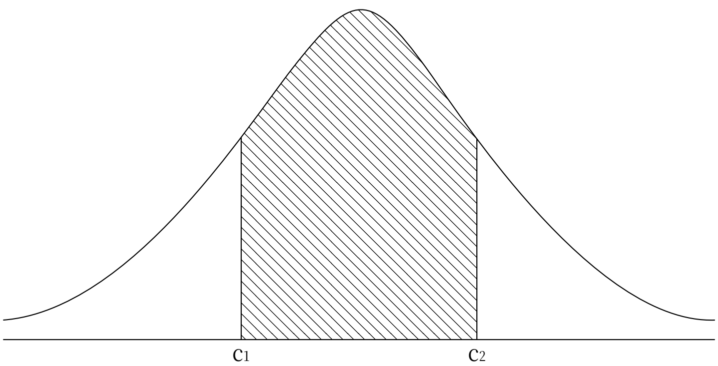
図11. 2



（下限で切断）



（上限で切断）



（上限と下限で切断）

$$=0 \quad \text{if} \quad y_i^* \leqq 0$$

$y_i^* \leqq 0$となる確率は

$$P(y_i^* \leqq 0)=P(a+bx_i \leqq -u_i)$$
$$=P(-u_i/\sigma \leqq (a+bx_i)/\sigma)$$
$$=1-\Phi((a+bx_i)/\sigma) \qquad 11.41)$$

その対数尤度は

$$\mathrm{LogL}=\Sigma y_{*i\leq 0}\mathrm{Log}(1-\Phi((a+bx_i)/\sigma))$$
$$=\Sigma y_{*i\leq 0}\mathrm{Log}(\Phi(-(a+bx_i)/\sigma)) \qquad 11.42)$$

となる（以下表記の簡単化のためにここでも$d_i=(a+bx_i)/\sigma$とする)。

$y_i^*>0$となる密度は

$$\frac{\phi((y_i^*-a-bx_i)/\sigma)}{\sigma P(y_i^*>0)}$$

である。上式に$P(y_i^*>0)$を乗じると、

$$\Phi(d_i)\cdot(1/\sigma)\cdot\{\phi((y_i^*-a-bx_i)/\sigma)/\Phi(d_i)\}$$

となる。この対数を取ると

$$\mathrm{LogL}=\Sigma y_{*i\leq 0}\mathrm{Log}((1/\sigma)\phi((y_i^*-a-bx_i)/\sigma)) \qquad 11.43)$$
$$=\Sigma y_{*i\leq 0}[\mathrm{Log}(1/\sqrt{2\pi}\sigma^2)-(1/2)((y_i^*-a-bx_i)^2/\sigma^2)]$$

となる。トービットモデルの尤度関数は11.42）式と11.43）式を足して

$$\mathrm{LogL}=\Sigma y_{*i\leq 0}\mathrm{Log}(\Phi(-d_i))+\Sigma y_{*i>0}\{\mathrm{Log}((1/\sigma)\phi((y_i^*-a-bx_i)/\sigma))\} \qquad 11.44)$$
$$=\Sigma y_{*i\leq 0}\mathrm{Log}(1-\Phi(d_i))+\Sigma y_{*i>0}\{\mathrm{Log}(1/\sqrt{2\pi}\sigma^2)-(1/2)((y_i^*-a-bx_i)^2/\sigma^2)\}$$

で求めることができる[15)16)]。

この時$y_i^*>0$の条件付き期待値は

$$E(y_i \mid y_i>0)=a+bx_i+E(u_i \mid u_i>-a-bx_i)$$
$$=a+bx_i+\sigma\phi(d_i)/\Phi(d_i) \qquad 11.45a)$$

で与えられる。全サンプルの期待値は

$$E(y_i)=P(y_i>0)E(y_i \mid y_i>0)$$
$$+P(y_i=0)E(y_i \mid y_i=0)$$
$$=\Phi(d_i)(a+bx_i+\sigma\phi(d_i)/\Phi(d_i))$$
$$+(1-\Phi(d_i))E(y_i \mid y_i=0)$$

この時右辺第二項は０となるので、

$$=\Phi(d_i)(a+bx_i)+\sigma\phi(d_i) \qquad 11.45b)$$

で与えられる。

なおマージナル効果については

$$\frac{\partial E(y_i^* \mid a+bx_i)}{\partial x_i}=b \qquad 11.46a)$$

$$\frac{\partial E(y_i \mid a+bx_i)}{\partial x_i}=\Phi(d_i)b \qquad 11.46b)$$

$$\frac{\partial E(y_i \mid y_i^*>0)}{\partial x_i}=\{1-d_i\phi(d_i)/\Phi(d_i)-(\phi(d_i)/\Phi(d_i))^2\}b \qquad 11.46c)$$

によることをMaddala［1983］は示している[17)]。

5.3　仮説の検定

（トービットモデルの制約）

トービットモデルは、11.44）式にみられるよ

14）一般性を失うことなく

$y_i=y_i^*$ if $y_i>c$、$y_i=0$ if $y_i^*\leqq c$

と変形することができる。

15）１階の条件についてはMaddala［1983］を参照されたい。

16）上限（c_1）と下限（c_2）の双方の閾値がある場合は対数尤度関数は次のように書くことができる。

$$\mathrm{LogL}=\Sigma y_{*i>c1}\mathrm{Log}(\Phi(-(c_1-a-bx_i)/\sigma))+\Sigma y_{*i<2}\mathrm{Log}(\phi((c_2-a-bx_i)/\sigma))+\Sigma_{c1\leq y*i\leqq c2}\mathrm{Log}((1/\sigma)\cdot\phi((y_i^*-a-bx_i)/\sigma)) \qquad s8)$$

17）McDonaldとMoffitは11.46c）式を次のように分解している。

$$\{\Phi(d_i)[1-(\phi(d_i)/\Phi(d_i))(d_i+\phi(d_i)/\Phi(d_i))]+\phi(d_i)(d_i+\phi(d_i)/\Phi(d_i))\}b \qquad s9)$$

これからx_iの変動の効果を

$$P(y_i^*>0)\frac{\partial E(y_i \mid x_i,\ y_i^*>0)}{\partial x_i}+E(y_i \mid x_i,y_i^*>0)\frac{\partial P(y_i^*>0)}{\partial x_i} \qquad s10)$$

の二つの効果に分解できる。

うにプロビット・モデル（11.18）式）と切断分布モデル（11.38）式）の結合型と考えることができる。言い換えればトービット・モデルはプロビット・モデルと切断分布モデルの説明変数が同じであり、かつそのパラメータは共通であることを仮定している。

しかし株式を買うかどうかの意志決定と、買うとした場合にいくら買うかの意志決定に、ある変数が与える効果は共通とは限らない。その効果が異なるならば、トービットモデルを用いることはできないことをCraggは指摘した。プロビット部分と切断分布部分とでパラメータが共通するかどうかの検定を行う必要がある。

$y_i^* = a + bx_i + u_i$

のモデルに関し、トービット・モデルの対数尤度L、プロビットモデル（すなわちy_i^*が正かゼロという情報のみを利用する）の対数尤度をL_p、切断分布モデル（すなわち、$y_i^*>0$のデータのみを利用する）の対数尤度をL_tとすると、パラメータは共通であるという帰無仮説の下で

$$L = -2(L_c - (L_p + L_t) \qquad 11.47)$$

の尤度比検定統計量が自由度２（パラメータがk個であればk）のχ^2分布に従うことで行うことができる[18)]。

（分散均一と正規分布の仮定）

トービット・モデルや切断分布モデルは誤差項が正規分布に従い。分散は均一であるという仮定に決定的に依存している。これらの仮定が充たされないときその推定量は一致性もない。たとえば$V(u_i) = \sigma_i^2 = \sigma^2 \exp(cz_i)^2$のように分散が不均一となるケースである。

正規性の検定についてはPaganやVellaによって提唱されている。その場合の推計方法がPowellによって提案されている。

5.4　Eviewsでの推計例

有価証券の需要をトービット・モデルで推計してみよう。第１章で用いた「金融資産の選択に関する調査」を利用する。有価証券の需要を世帯所得、金融資産、負債、世帯主年齢とその最終学歴（大卒）でみてみる。有価証券の需要への効果は所得（lsetai）、資産（lmoney）は正、負債（ldebt）は負が期待される。投資が情報分析能力に影響されるならば学歴（daigaku）は正である。

1　workfile a：tobit u 1 1600

2　smpl 1 1561

'有価証券、金融資産、負債、年齢とその自乗

3　read c：\data\temp1.txt stock money debt age age2

'世帯年収（対数値）、高卒、短大卒、大卒ダミー

4　read c：\data\temp2.txt lsetai high tandai daigaku

5　series debt=1*(debt=0)+debt*(debt>0)

6　series kabu=1*(stock=0)+stock*(stock>0)

7　series lkabu=log(kabu)

8　series lmoney=log(money)

9　series ldebt=log(debt)

10　series kabusiki=1*(stock>0)

'Tobitモデルの推定。下が０でcensored、上は∞のケース（既定値）[19)]

'Tobitモデル$lkabu_i^* = a_0 + a_1 lsetai_i + a_2 lmoney_i + a_3 ldebt_i + a_4 age_i + a_5 daigaku_i + u_i$の推定。

'censoredが従属変数に制約がある推計のコマン

---

18) 11.44）式に$\Sigma_{y*i>0} Log(\Phi(d_i))$を足して、引いた上で書き直すと

$$LogL = \Sigma_{y*i\leq 0} Log(\Phi(-d_i)) + \Sigma_{y*i>0} Log(\Phi(d_i))$$
$$+ \Sigma_{y*i>0} Log((1/\sigma)\phi((y_i^* - a - bx_i)/\sigma) - \Sigma_{y*i>0} Log(\Phi(d_i)) \qquad s11)$$

となる。s11）式の最初の行はプロビット・モデルの対数尤度関数、第２行は切断分布モデルの対数尤度関数である。

19) 上限下限の双方に制約がある場合は、以下のようにL=c１、R=c２のオプションで行うことができる。下が０でcensored、上は8.15でcensoredのケース

equation eqdce. censored（L=０,R=8.15）lkabu c lsetai lmoney ldebt age daigaku

ド（binaryに相当）

11 equation eqtobit. censored lkabu c lsetai lmoney ldebt age daigaku

'対数尤度を保存

12 series ltobit＝@logl

'平均値の回りでのbxの作成

13 series heikin＝@coefs(1)＋@coefs(2)*@mean(lsetai)＋@coefs(3)*@mean(lmoney)＋@coefs(4)*@mean(ldebt)＋@coefs(5)*@mean(age)＋@coefs(6)*@mean(daigaku)

'dの作成

14 series xbs＝heikin/@se

'E(yi｜yi＞０）の時の平均値の回りでの期待値（11.45a）式を参考に）

15 series hkitai＝heikin＋@se*@dnorm(xbs)/@cnorm（xbs）

'全サンプルの平均値の回りでの確率

16 series prob＝@cnorm（xbs）

'全サンプルの平均値の回りでの期待値（11.45b）式を参考に）

17 series expect＝@cnorm(xbs)*hkitai

'LMONEYのマージナル効果（11.46b）式を参考に）

18 series expkabu＝@cnorm(xbs)*@coefs(3)

'McDonald, Moffitの分解（s８）式を参考に）

19 series mc1＝@cnorm(xbs)*(1－xbs*(@dnorm(xbs)/@cnorm(xbs))－(@dnorm(xbs)/@cnorm(xbs))^2)

20 series mc2＝@dnorm(xbs)*xbs＋@dnorm(xbs)*(@dnorm(xbs)/@cnorm(xbs))

'分解の合計値

21 series mcd＝mc1＋mc2

'Craggの検定のためのProbitモデルの推定

22 equation eqprobit. binary kabusiki c lsetai lmoney ldebt age daigaku

'Probitモデルの対数尤度を保存

23 series lprobit＝eqprobit．@logl

'有価証券を保有するサンプルだけを選択

24 smpl if lkabu＞0

'切断分布モデルの推定。（t）がtruncated regressionのオプション

25 equation eqtrunc. censored(t) lkabu c lsetai lmoney ldebt age daigaku

'切断分布モデルの対数尤度を保存

26 series ltrunc＝eqtrunc. @logl

'Craggの検定

27 series ltest＝－2*(ltobit－lprobit－ltrunc)

'χ^2統計量を計算し、有意水準をみる

28 series pchisq＝１－@chisq（ltest,eqtobit．@ncoef)

29 smpl @all

11行のトービット・モデルの推計結果は表11.5に掲げるとおりである。上欄に推定法がトービット・モデル（最尤法）であることが示されている。下限０が閾値であることも表示されている。中欄にあるError Distribution, scale(7)がσである（ここでは７番目のパラメータである）。下欄にセンサーされたサンプルが1,282個、有価証券を保有しているサンプルが279個であることが表示されている。約18%が有価証券を保有している。

なおトービット・モデルの推計結果の報告は通常次のように行う。

$$\underset{}{lkabu=}\ \underset{(-11.74)}{-38.80}\ \underset{(3.96)}{+1.74lsetai}\ \underset{(9.19)}{+2.95lmoney}$$

$$\underset{(2.42)}{+0.19ldebt}\underset{(0.88)}{+0.022age}\underset{(4.65)}{+2.57daigaku}+u_i$$

カッコ内は漸近的t値 対数尤度－1291.48 保有サンプル279 N＝1,561

15行で有価証券を保有するときの、平均値回りでの期待値（11.45a）式）を計算している。結果は0.3814であった。16行で平均値回りでの保有確

表11.5

Dependent Variable：LKABU Method：ML–Censored Normal（TOBIT） Sample：1 1561 Included observations：1561 Left censoring（value）at zero Convergence achieved after 9 iterations Covariance matrix computed using second derivatives				
	Coefficient	Std. Error	z–Statistic	Prob.
C	−38.80377	3.305719	−11.73838	0.0000
LSETAI	1.740643	0.439524	3.960292	0.0001
LMONEY	2.946342	0.320456	9.194212	0.0000
LDEBT	0.186948	0.077238	2.420423	0.0155
AGE	0.021971	0.024974	0.879765	0.3790
DAIGAKU	2.574385	0.553295	4.652826	0.0000
		Error Distribution		
SCALE：C(7)	6.530102	0.336047	19.43209	0.0000
R–squared	0.186629	Mean dependent var		0.918748
Adjusted R–squared	0.183489	S.D. dependent var		2.039722
S.E. of regression	1.843114	Akaike info criterion		1.663650
Sum squared resid	5279.043	Schwarz criterion		1.687654
Log likelihood	−1291.478	Hannan–Quinn criter.		1.672574
Avg. log likelihood	−0.827340			
Left censored obs	1282	Right censored obs		0
Uncensored obs	279	Total obs		1561

表11.6

Dependent Variable：LKABU Method：ML−Censored Normal（TOBIT） Sample（adjusted）：3 1557 IF LKABU＞0 Included observations：279 after adjusting endpoints Truncated sample Left censoring（value）at zero Convergence achieved after 3 iterations Covariance matrix computed using second derivatives				
	Coefficient	Std. Error	z–Statistic	Prob.
C	−1.806846	0.741548	−2.436588	0.0148
LSETAI	0.138619	0.105798	1.310224	0.1901
LMONEY	0.758392	0.083223	9.112747	0.0000
LDEBT	0.009008	0.018865	0.477484	0.6330
AGE	0.009552	0.006012	1.588786	0.1121
DAIGAKU	0.109409	0.132059	0.828484	0.4074
		Error Distribution		
SCALE：C(7)	1.011143	0.042844	23.60064	0.0000
R–squared	0.345689	Mean dependent var		5.140379
Adjusted R–squared	0.331256	S.D. dependent var		1.252064
S.E. of regression	1.023897	Akaike info criterion		2.909842
Sum squared resid	285.1555	Schwarz criterion		3.000948
Log likelihood	−398.9230	Hannan–Quinn criter.		2.946389
Avg. log likelihood	−1.429832			
Left censored obs	0	Right censored obs		0
Uncensored obs	279	Total obs		279

率が計算されている。その値は4.63-E06と極めて低い。これは全体での保有が18%にすぎないことを反映している。17行で全サンプルについて平均値での期待値が計算されている（値は1.77E-06であった)。18行で金融資産のマージナル効果（11.46b）式のケース）が計算されている。これも1.37E-05であった。これらの結果は有価証券の需要が相当の高所得者、高資産家、高学歴者に偏っていることを示唆している。

19〜21行でMcDonaldとMoffitの分解を行い、それの合計が平均値回りでの確率に等しいことを確かめている。

22行のプロビット・モデルの対数尤度は−605.7093であった。25行の切断分布モデルの対数尤度は−398.923であった。これからCraggの検定結果は

ltest＝−2*(−1291.478+(605.7093+398.923))
　＝573.6962

20）Craggの検定で保有確率にかかる係数と需要にかかる係数が同一であるという帰無仮説が棄却された場合、サンプル・セレクション・モデル（sample selection model）として知られる方法で推計を行う必要がある。DavidsonとMacKinnonは以下のような対数尤度関数を提案している。

$z_i = ew_i + u_{1i}$ $z_i = 1$ if $z_i^* > 0$ $z_i = 0$ otherwise

$y_i = bx_i + u_{2i}$ $y_i = y_i^*$ if $z_i^* > 0$ $y_i = 0$ otherwise

$\begin{pmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \end{pmatrix} \sim NID\left(0 \begin{bmatrix} \sigma^2 & \rho\sigma \\ \rho\sigma & 1 \end{bmatrix}\right)$ ρはu_{1i}とu_{2i}の相関を表す。

$$\mathrm{LogL} = \Sigma_{z_i=0} \mathrm{Log}(\Phi(-ew_i)) + \Sigma_{z_i=1} \mathrm{Log}(1/\sigma \cdot \phi(y_i - bx_i)) +$$

$$\Sigma_{z_i=1} \mathrm{Log}\left(\phi\left(\frac{ew_i + \rho((y_i - bx_i)/\sigma)}{(1-\rho^2)^{1/2}}\right)\right) \qquad \text{s12)}$$

となる。自由度６のχ^2統計量の５％点は12.592であるから帰無仮説は棄却される[20]。

なお切断分布モデルの結果は表11.６に掲げるとおりである。有意な変数が金融資産（LMONEY）のみである。質的選択モデルやトービット・モデル等最尤法で推計するとき、大標本であることを前提にして検定が行われる。標本が少ない場合その係数に安定性が欠け、検定もうまくいかないことが多い。経験則からいえばサンプルは少なくとも500以上あることが望ましい。この切断分布モデルはサンプル数（279）が少ないことを反映していると考えられる。

参考文献

縄田和満［1997］『Probit, Logit, Tobit』応用計量経済学Ⅱ、多賀出版

Davidson, R. and J.G. MacKinnon［1993］*Estimation and Inference in Econometrics,* Oxford University PressのCh15

Greene, W.H.［1999］*Econometric Analysis,* 4th ed, Prentice HallのCh19. 1−4, Ch20. 1−3

Johnston, J. and J. DiNardo［1997］*Econometric Methods,* 4thed, McGraw HillのCh13

Maddala, G.S.［1983］*Limited−Dependent and Qualitative Variables in Econometrics,* Cambridge University PressのCh2, Ch6