

暗号資産市場におけるラフボラティリティの性質

広島経済大学

高石哲弥

1. はじめに

ボラティリティは金融の実証分析においてリスクを測る指標として用いられ、金融資産のリスク管理を行う上で重要な指標となっている。ボラティリティの将来値を予測することは金融資産を安全に管理するために重要なタスクとなっている。ボラティリティの予測手法として、一般的に取られる方法は金融時系列の変動をモデル化する方法である。この際、実際の金融時系列データの性質を多く反映することが良いモデルの1つの指針となる。金融時系列データの性質として、金融資産の種類に関わらず共通に表れる性質が知られており、それらの性質を **Stylized facts** と呼ぶ。主な **Stylized facts** は以下である[1]。

- (i) 収益率時系列の短期記憶性
- (ii) 絶対値収益率時系列（又はボラティリティ時系列）の長期記憶性
- (iii) ボラティリティクラスタリングを示す
- (iv) 収益率分布のファットテイル性

ボラティリティクラスタリングはボラティリティが高い時期や低い時期が繰り返し現れる性質であり、ボラティリティを特徴付ける性質でもある。ボラティリティクラスタリングを持つモデルとして、Engle による **Autoregressive conditional heteroscedasticity(ARCH)** モデル[2]がある。ARCH モデルはボラティリティが過去の収益率の2乗による自己回帰モデルとして定式化されている。ARCH モデルは更に Bollerslev によって **Generalized ARCH (GARCH)** モデル[3]として一般化されている。これらのモデルはボラティリティクラスタリングの性質を持つ一方、ボラティリティ時系列が短期記憶となる欠点がある。そのため、ボラティリティ時系列に長期記憶を持たせるモデル構築も行われている。例えば、**Autoregressive integrated moving average(ARIMA)**モデルを拡張した、**Autoregressive fractionally integrated moving average(ARFIMA)**モデル[4-6]や GARCH モデルに長期記憶性を導入した **Fractionally integrated GARCH(FIGARCH)**モデル[7]がある。

時系列の記憶性を表す指数として、ハースト指数 H が知られている[8]。このハースト指数と時系列の記憶性との関係は以下になる。

- $1 > H > 1/2$ のとき 持続的（長期記憶）
- $H = 1/2$ のとき ランダム（記憶性なし）
- $1/2 > H > 0$ のとき 反持続的（負の自己相関）

ボラティリティ時系列が長期記憶を持つことから、ボラティリティ時系列のモデル化に $H > 1/2$ の性質を持つ時系列を導入するのは自然な流れであり、 $H > 1/2$ の非整数ブラウン運動を基にしたモデルが Comte and Renault などのグループによって提唱されている[9-12]。

ボラティリティ時系列は長期記憶を示すことが広く知られていたが、近年の研究で、Gatheral et al. [13]は株価及び債券先物契約の実現ボラティリティ (RV) の増分時系列のハースト指数 H を計算し、その値が $H \sim 0.1$ 程度、従って $H < 1/2$ となっていることを指摘した。このことは、ボラティリティ増分時系列が反持続的になっていることを示しており、ボラティリティ時系列の長期記憶性が広く知られていたことから、驚きを持って捉えられた。一般に、 $H < 1/2$ を持つボラティリティをラフボラティリティと呼ぶ。そして、ラフ性を持つボラティリティモデルとして、Gatheral et al.は $H < 1/2$ のハースト指数を持つ非整数ブラウン運動で与えられる rough fractional stochastic volatility モデルの利用を提唱している。また、 $H < 1/2$ の非整数ブラウン運動によるラフボラティリティモデルは、Implied volatility(IV) の期間構造における負のべき乗則を説明できることが知られており [14-15]、そのことはラフボラティリティモデルを支持する根拠の 1 つとなっている。

実証的にはその後、Implied Volatility や他の金融資産価格のボラティリティ時系列における分析から、それらのボラティリティ時系列もハースト指数が $H < 1/2$ となっていることが確認されている [16-18]。Gatheral et al. [13]によると、ボラティリティ時系列はモノフラクタルであるとしているが、一方で、ビットコインのボラティリティ時系列がラフボラティリティかつマルチフラクタルとなっていることが指摘されている [18]。また、ハースト指数の計測法は様々なものが存在し、Fukasawa [19]は改善された方法を用いてハースト指数を計測し、その値が $H \sim 0.1$ となることを指摘している。この値は $1/2$ 以下であることからラフボラティリティの性質を示しているが、Gatheral et al.が求めた値よりは小さな値となっている。これらのラフボラティリティに関する実証分析結果に対して、Cont et al. [20]は、実現ボラティリティで観測されているハースト指数は integrated volatility におけるハースト指数とは違うということを指摘している。そして、その違いは discretization error (マイクロストラクチャーノイズ) によるという予測をしている。

このように、Gatheral らがボラティリティのラフ性について言及した後、ボラティリティについて理論的、実証的な研究が多くなされるようになってきているが、まだ解明されていないことも多い。本研究では、ラフボラティリティの性質についていくつかの観点から研究を進め、ボラティリティの性質のさらなる理解を図ることを目的としている。

実現ボラティリティは高頻度データを利用して計算されるが、その精度は計算に用いるサンプル数 (有限サンプル効果) と高頻度データのサンプリング間隔 (マイクロストラクチャーノイズ) に依存する。有限サンプル効果とマイクロストラクチャーノイズとも実現ボラティリティの値に影響 (バイアス) を与えることが知られている。従って、バイアスのある実現ボラティリティから得られたハースト指数はバイアスの影響を受ける可能性がある。本研究では、実現ボラティリティ時系列のハースト指数測定に際し、マイクロストラクチャーノイズと有限サンプル効果がどのような影響を与えるかを実証的に分析する。また、Gatheral et al. はボラティリティ時系列がモノフラクタルであるとしているが、マルチフラクタル性の存在についてはまだはっきりしていないので、ボラティリティ時系列のマル

チフラクタル性についても研究する。また、ラフボラティリティの性質を反映するモデルとして、ハースト指数が $1/2$ 以下の非整数ブラウン運動を基にしたモデル化の研究も多くなされるようになっているが、本研究では、モデル化に際し時系列の性質を仮定する必要がない量子回路を利用したモデル化も試みる。そして、量子回路モデルがラフボラティリティの性質を示すかどうか研究する。

2. ボラティリティのモデル化

本章では、ボラティリティのモデル化について考察する。図1はボラティリティモデル化の考え方の概略図である。一般的には、何らかの過去の情報をもとに将来のボラティリティ値を導出できるようにモデル化を行う。過去の情報としては、収益率、ボラティリティ、出来高、価格など様々なものが考えられる。図1では左から過去の情報がモデルBOXに入力されている。モデルBOXは過去の情報を受け取り何らかの値を出力する。モデルBOXはモデル化を行うところで、真のボラティリティを出力するモデル（オラクル）は知られていないので、所望のボラティリティが得られるように様々なモデル化が行われる。例えば、ボラティリティクラスタリングの性質を捉える GARCH モデルや、ラフボラティリティの性質に注目するなら、非整数ブラウン運動を基にしたモデル等が考えられる。これらのモデルには、いくつかのパラメータが存在し、それらのパラメータは過去の時系列に合うように最尤法やベイズ推定などで決定される。



図1 ボラティリティモデル化の概略図

モデルBOXは真のボラティリティモデル（オラクル）を近似するものと考えられる。どのように近似するかによって様々なモデルが提唱される。例えば、GARCH モデルは過去の収益率と過去のボラティリティの関数をオラクルとして、その関数をテイラー展開で近似した形となっている。過去のボラティリティを σ_t^2 、収益率を r_t としてインプットし、次期のボラティリティ σ_{t+1}^2 がある関数（オラクル）によって

$$\sigma_{t+1}^2 = f(\sigma_t^2, r_t) \quad (1)$$

表されているとする。一般には、 $f(\sigma_t^2, r_t)$ の関数形は分からないので、何らかのモデルで近似する。 $f(\sigma_t^2, r_t)$

を σ_t^2 と r_t の小さいところでテイラー展開すると

$$f(\sigma_t^2, r_t) = f_{00} + f_{10}\sigma_t^2 + f_{01}r_t + f_{11}\sigma_t^2 r_t + \frac{1}{2}f_{20}(\sigma_t^2)^2 + \frac{1}{2}f_{02}(r_t)^2 + \dots \quad (2)$$

となる。ここで、 f_{ij} は展開係数を表し、

$$f_{ij} = \left(\frac{\partial}{\partial \sigma_t^2} \right)^i \left(\frac{\partial}{\partial r_t} \right)^j f(\sigma_t^2, r_t) \Big|_{\sigma_t^2, r_t=0} \quad (3)$$

で定義される。ここで、ボラティリティが収益率 r_t の正負について対称と仮定すると、 f_{01} 及び f_{11} をゼロとすることができる。そして、 σ_t^2 と r_t の最低次のみ残すと

$$f(\sigma_t^2, r_t) = f_{00} + f_{10}\sigma_t^2 + \frac{1}{2}f_{02}(r_t)^2 \quad (4)$$

を得ることができる。これは、GARCH(1,1)モデルとして知られている

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \beta\sigma_t^2 + \alpha(r_t)^2 \quad (5)$$

の関数形に一致する。ここで、 α, β, ω はテイラー展開係数に対応するがそれらの値は未知（真の関数形が未知なので具体的な値は分からない）なので、 α, β, ω は過去の時系列データにフィットするように決定される。言い換えれば、データを利用して展開係数を推定していると言うことができる。

株価等の金融時系列には収益率 r_t に対するボラティリティ非対称性が存在することが知られている。ボラティリティ非対称性を考慮するため、収益率 r_t に比例する項を残すと、

$$f(\sigma_t^2, r_t) = f_{00} + f_{10}\sigma_t^2 + f_{01}r_t + \frac{1}{2}f_{02}(r_t)^2 \quad (6)$$

が得られる。この関数形は、Quadratic ARCH モデル[21]として知られるモデル形となる。更に近似の精度を上げようとするならば、高次項を導入してゆけば良いことになるが、この方針ではフィットパラメータ数が増えてゆくことになり、パラメータ推定の難しさが増してゆく。また、テイラー展開の次数を上げることによって近似の精度が劇的に上昇するわけでもない。そこで、テイラー展開以外の方法によって関数を近似することも考えることができる。例えば、パデ近似では有理関数によって関数を近似し、多くの場合テイラー展開よりも良い近似を与えることが知られている。パデ近似の考え方を利用したモデルとして、Rational GARCH (RGARCH) モデル[22]があり、このモデルは以下の関数形で与えられる。

$$f(\sigma_t^2, r_t) = \frac{\omega + \alpha r_t^2 + \beta \sigma_t^2}{1 + \gamma r_t} \quad (7)$$

このモデルにおいて、 γ がボラティリティの非対称性を表すパラメータに対応する。 $\gamma = 0$ とおくと、式（5）で与えられる GARCH(1,1)モデルに一致する。

その他にも様々な関数形が提案されている。例えば、対数変換したボラティリティでモデル化した Exponential GARCH モデル[23]やボラティリティのべき乗の指数をパラメータとした Asymmetric power GARCH モデル[24]などが提案されている。このように様々なモデルが存在することは、モデルごとに違うボラティリティ値を与えることになり、どのモデルが良いかはケースバイケースとなる。モデルによらない推定方法としては実現ボラティリティがあるが、予測を行おうとすると実現ボラティリティ時系列のモデル化を行う必要が出てくる。このように、ボラティリティの予測するためには予め何らかのモデル化を必要とするが、8章では量子回路を利用してモデル化を行う。量子回路モデルでは予

めモデルの関数形を仮定する必要がないという利点がある。

3. マイクロストラクチャーノイズと有限サンプル効果

本章では、実現ボラティリティ[25,26]を計算する際に存在するバイアス、マイクロストラクチャーノイズと有限サンプル効果について述べる。実現ボラティリティは日中の高頻度データを利用して計算され、 t 日の実現ボラティリティ $RV_{t,\Delta}$ は以下の与えられる。

$$RV_{t,\Delta} = \sum_{i=1}^{1440/\Delta} r_{t,\Delta,i}^2 \quad (8)$$

ここで、 Δ はサンプリング間隔（分）、 $r_{t,\Delta,i}$ は t 日内の Δ 間隔でサンプルされた i 番目の収益率である。1 日を 1440 分とすると 1 日に $n = 1440/\Delta$ 個のサンプル数がある。実現ボラティリティは Δ が 0 になる極限で **integrated volatility** に一致する。しかしながら、市場でサンプルされる $r_{t,\Delta,i}$ は誤差（マイクロストラクチャーノイズ）が付随しており、 Δ が小さくなると式（8）での和においてマイクロストラクチャーノイズの影響が大きくなり、真の値からズレてくる [27]。

マイクロストラクチャーノイズを修正する方法として、修正係数を実現ボラティリティに掛ける方法がある。株価等においては 1 日の中に取引がない時間帯があり、取引時間帯のデータだけを式（8）によって計算すると日次ボラティリティとしては過小評価になってしまう。そこで、日次ボラティリティを推定するために修正ファクターをかけて修正する。修正ファクターを c とし、実現ボラティリティが $\overline{RV}_{t,\Delta} = cRV_{t,\Delta}$ と修正されると仮定する。Hansen と Lunde[28]は、実現ボラティリティの平均値が日次収益率の分散に一致するように、修正ファクター以下のように計算している。

$$c = \frac{\sum_{t=1}^N (R_t - \overline{R})^2}{\sum_{t=1}^N RV_{t,\Delta}} \quad (9)$$

ここで、 R_t は日次収益率、 $\overline{R}$ は日次収益率の平均である。この方法は取引時間帯に関する過小評価の修正が目的であるが、同時にマイクロストラクチャーノイズの影響も修正されることが考えられる。

このタイプの修正ファクターをモデルのパラメータとして導入したモデルとして、Realized Stochastic Volatility (RSV) モデル[29]がある。このモデルにおいて、修正ファクターはパラメータなので予め式(9)のように計算しておく必要はなく、時系列データにフィットするようにパラメータ値が決定される。株価を用いた実証分析からは、RSV モデルのパラメータ値と式（9）で計算された値がよく一致することが示されている[30]。

実現ボラティリティが $\overline{RV}_{t,\Delta} = cRV_{t,\Delta}$ として修正されたとする。この時、実現ボラティリティの増分時系列、すなわち log-RV increments の時系列は

$$\log \overline{RV}_{t,\Delta} - \log \overline{RV}_{t-1,\Delta} = \log RV_{t,\Delta} - \log RV_{t-1,\Delta} \quad (10)$$

となり、この中では修正ファクターはキャンセルする。従ってこのタイプの修正がある場合、マイクロストラクチャーノイズがある場合とない場合で、増分時系列は一致する。従って、増分時系列のハースト指数測定にマイクロストラクチャーノイズは影響しないことになる。マイクロストラクチャーノイズが $\overline{RV}_{t,\Delta} = cRV_{t,\Delta}$ の形で修正が可能かどうかはそのままでは分からないが、以下の議論から実現ボラティリティで標準化した収益率のモーメントを計算して検証する。

実現ボラティリティをボラティリティの代理、 $\sigma_t = RV_t^{1/2}$ として、収益率を標準化した $\bar{r}_t = r_t / RV_t^{1/2}$ の分布を考える。実現ボラティリティがボラティリティを良く近似している場合、標準化された収益率の分布は標準正規分布となる。実際、標準化された収益率の分布が近似的に標準正規分布になることが示されている[31]。しかし、実現ボラティリティを計算するときに用いる収益率のサンプル数が少ない場合には、標準化された収益率の分布は標準正規分布からズレてくる。有限のサンプル数で計算された実現ボラティリティを用いた場合の分布は以下のように導出されている[32]。

$$P(\bar{r}) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi n} \Gamma(\frac{n-1}{2})} \left(1 - \frac{\bar{r}^2}{n}\right)^{(n-3)/2} \quad (11)$$

この分布は、サンプル数 n が無限大の極限で標準正規分布となる。株価を用いた実証研究から有限サンプル数での分布が式 (11) で表されることが示されている[33]。この分布における $2k$ 次モーメントも計算されており以下で与えられる。

$$E[r^{2k}] = \frac{n^k(2k-1)(2k-3)\cdots 1}{(n+2k-2)(n+2k-4)\cdots n} \quad (12)$$

マイクロストラクチャーノイズの影響がある場合、モーメントの値にも影響があると考えられる。その一方、実現ボラティリティのマイクロストラクチャーノイズが定数のファクターで修正される場合 ($\overline{RV}_{t,\Delta} = cRV_{t,\Delta}$) には、適切なモーメントの比は定数ファクターがキャンセルし、モーメントの比には影響を与えない。例えば、 $2k$ 次モーメントを 2 次モーメントの k 乗で割った値 $E[r^{2k}] / E[r^2]^k$ は定数ファクターがキャンセルする。従って、

$$\frac{E[r^{2k}]}{E[r^2]^k} = \frac{n^k(2k-1)(2k-3)\cdots 1}{(n+2k-2)(n+2k-4)\cdots n} \quad (13)$$

となる。ここで、 $E[r^2] = 1$ で利用した。

また、以下の場合のモーメント比も修正ファクターはキャンセルする。

$$\frac{E[r^8]}{E[r^4]^2} = \frac{35}{3} \frac{n(n+2)}{(n+6)(n+4)} \quad (14)$$

$$\frac{E[r^{10}]}{E[r^6]E[r^4]} = 21 \frac{n(n+2)}{(n+8)(n+6)} \quad (15)$$

このようなキャンセルが起こる場合、マイクロストラクチャーノイズが定数の修正

ファクターで説明できることを示唆する。6章では実証分析からこのようなキャンセルが起こっていることを示す。

4. マルチフラクタル解析

時系列の一般化ハースト指数はマルチフラクタル解析によって求める。本章では、Kantelhardt et al.によって開発されたマルチフラクタル解析法、Multifractal Detrended Fluctuation Analysis(MFDFA)法[34]について説明する。MFDFA 法は以下の手続きから成る。

- (i) 対象とする時系列を $\{x_t, t=1, \dots, N\}$ とすると、これらのデータから次のプロファイル $y(k)$ を作成する。

$$y(k) = \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}) \quad (16)$$

ここで、 $\bar{x}$ は時系列 x_t の平均値を表す。

- (ii) 作成したプロファイル $y(k)$ を長さ s の $N_s = N/s$ 個のセグメントに分け、セグメント内でトレンドを除去したデータの分散を求める。具体的には以下の、 ν 番目のセグメント、 $\nu = 1, \dots, N_s$ に対して $F^2(s, \nu)$ を計算する。

$$F^2(s, \nu) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s (y[(\nu-1)s+i] - p_\nu(i))^2 \quad (17)$$

$p_\nu(i)$ はトレンドを除去するための多項式関数である。本研究ではセグメント内のデータを以下の3次関数でフィットした関数を利用した。

$$p_\nu(i) = a + bi^2 + ci^3 \quad (18)$$

ここで、 a, b, c はフィッティングによって得られる係数である。また、 N は s の倍数とは限らないので、その場合、最後の端数のデータが残ってしまう。これらのデータも利用するために、最後のデータから順番に並べ、上記の手続きを繰り返す。具体的には、 $\nu = N_s + 1, \dots, 2N_s$ に対して、以下を計算する。

$$F^2(s, \nu) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s (y[N - (\nu - N_s)s + i] - p_\nu(i))^2 \quad (19)$$

- (iii) このようにして計算した分散、 $F^2(s, \nu)$ から q 次の揺らぎ関数を以下のように定義する。

$$F_q(s) = \left(\frac{1}{2N_s} \sum_{\nu=1}^{2N_s} [F^2(s, \nu)]^{q/2} \right)^{1/q} \quad (20)$$

もし、時系列が長期のべき的相関を持つなら、式(19)は以下のように振る舞うことが期待される。

$$F_q(s) \sim s^{h(q)} \quad (21)$$

$h(q)$ は一般化ハースト指数とよばれるものである。式(20)の $\log$ を取り、線形変換したのち、フィッティングパラメータとして $h(q)$ を得ることができる。 $q = 2$ のとき、上記の手続きは、Detrended fluctuation analysis と同一となり、 $h(2)$ はハースト係数に一致する。

$q=0$ のときは、式(19)では計算できないので、以下の手続きによって計算する。

$$F_0(s) = \exp\left(\frac{1}{4N_s} \sum_{\nu=1}^{2N_s} \ln[F^2(s, \nu)]\right) \sim s^{h(0)} \quad (22)$$

- (iv) 式(20)及び(21)の振る舞いから一般化ハースト指数 $h(q)$ を求める。
一般化ハースト指数からはその他のマルチフラクタル性を表す特徴量を得ることができる。マルチフラクタルスケール指数 $\tau(q)$ は一般化ハースト指数を利用して、以下で与えられる。

$$\tau(q) = qh(q) - 1 \quad (23)$$

更に、マルチフラクタル時系列を特徴づける量として特異性スペクトラム $f(\alpha)$ があり、ルジャンドル変換によって $\tau(q)$ と以下のように関連している。

$$\alpha = \tau'(q) \quad (24)$$

$$f(\alpha) = q\alpha - \tau(\alpha) \quad (25)$$

これらの式は、式(22)から $h(q)$ を使って以下のように表される。

$$\alpha = h(q) + h'(q) \quad (26)$$

$$f(\alpha) = q[\alpha - h(q)] + 1 \quad (27)$$

一般化ハースト指数 $h(q)$ が q に関わらず一定値を取る場合、時系列はモノフラクタルという。一方、 $h(q)$ が変化する場合、マルチフラクタルという。ガウシアンランダム時系列はモノフラクタルであり、 $h(q) = 1/2$ となる。従って、マルチフラクタル性の存在は、ガウシアンランダム時系列からの乖離を意味し、マルチフラクタル性の強さを金融時系列の非効率性の大きさに関連付ける場合がある。

マルチフラクタル性の強さを測る指標として、

$$\Delta h(q) = h(-q) - h(q) \quad (28)$$

が提案されている[35]。 $\Delta h(q)$ は時系列がモノフラクタルである場合、ゼロとなる。同様に、特異性スペクトラム $f(\alpha)$ を利用したマルチフラクタル性の指標として、

$$\Delta f(\alpha) = f(\alpha_{max}) - f(\alpha_{min}) \quad (29)$$

が提案されている。 $\Delta f(\alpha)$ も同様に、モノフラクタル時系列の場合 $\Delta f(\alpha) = 0$ となる。

以下に、MFDDFA 法の実行手続きについて株価データを利用して具体的に示す。利用したデータは2005年1月～2024年12月までのソニー（株）、トヨタ自動車（株）、及び丸紅（株）の3社の終値価格データを利用した。

図2(a)はSONYの株価、また図2(b)は株価から計算した収益率である。ここで、価格を P_t とすると、収益率 R_t は $R_t = \log(P_t) - \log(P_{t-1})$ で定義される。同様に図3はトヨタ自動車、図4は丸紅（株）についての株価と収益率を表している。

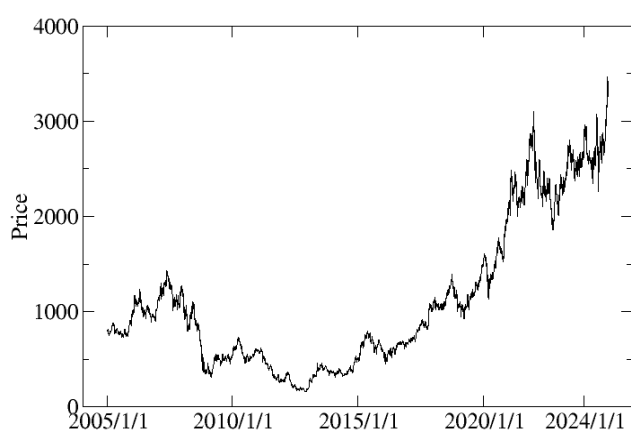
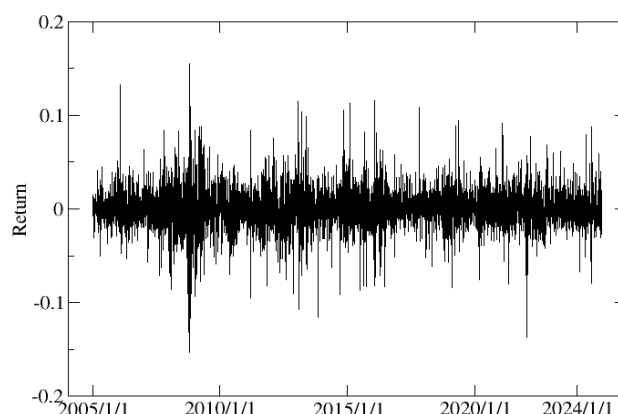


図2 (a) SONY の株価



(b) SONY の株価収益率

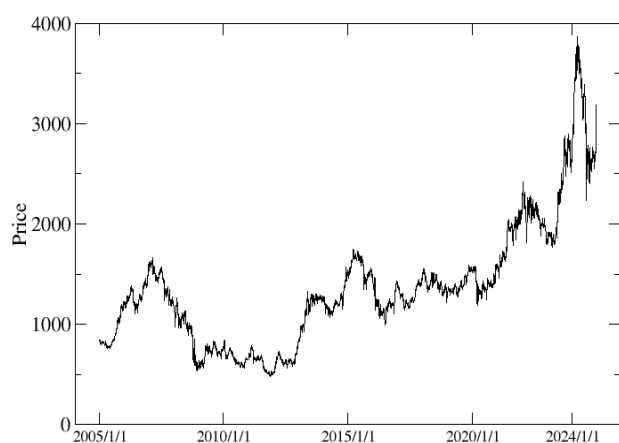
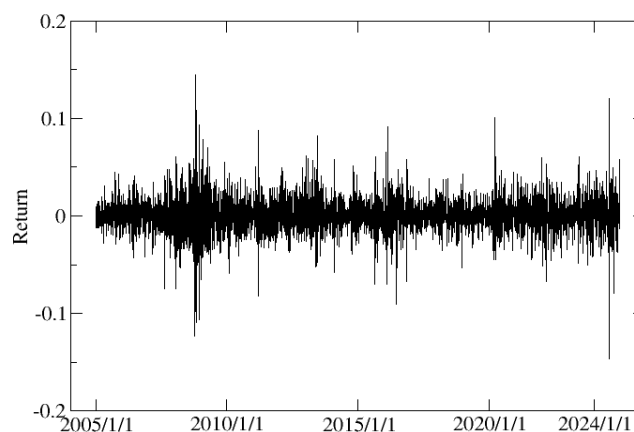


図3 (a) TOYOTA の株価



(b) TOYOTA の株価収益率

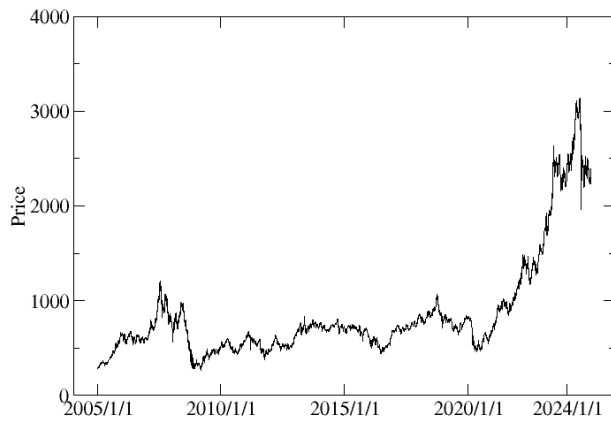
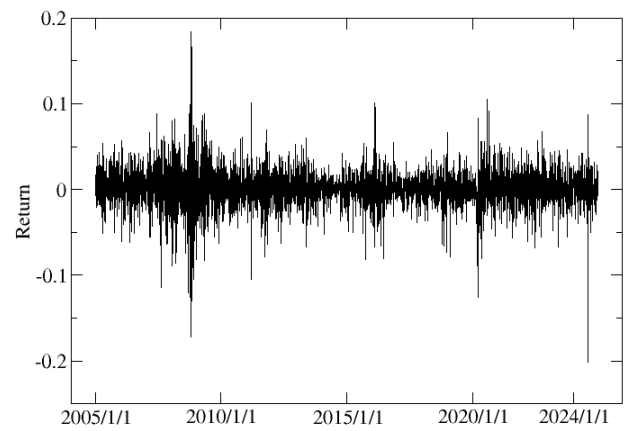


図4 (a) 丸紅の株価



(b) 丸紅の株価収益率

ここでは、一般化ハースト指数を求めるために時系列長は 1250 日（約 5 年）として、その区間を 1 日毎ずらしながら計算を繰り返し、一般化ハースト指数の時間変動を求める。まず、収益率データから式 (16) に従って、プロファイル $y(k)$ を作成する。そして、 $y(k)$ を利用して、式 (17) と (19) から $F^2(s, \nu)$ を計算する。この $F^2(s, \nu)$ を利用して、式 (20) より揺らぎ関数 $F_q(s)$ を得る。

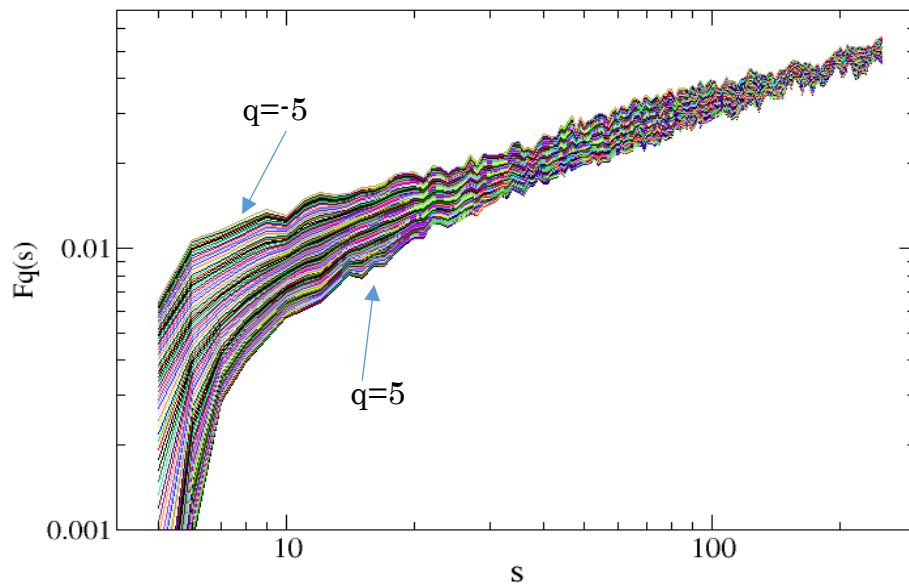


図5 揺らぎ関数 $F_q(s)$

図5はSONYの株価収益率時系列について、ある1つの区間で計算した $F_q(s)$ をlog-logプロットで図示している。式(21)からlog変換後は直線で表されると予測され、実際sの大きい領域では直線でよく表されている。 $h(q)$ は直線でフィットした時の比例係数として決定される。本研究では、 $-5 < q < 5$ の範囲について、0.1刻みで $F_q(s)$ の計算を行った。

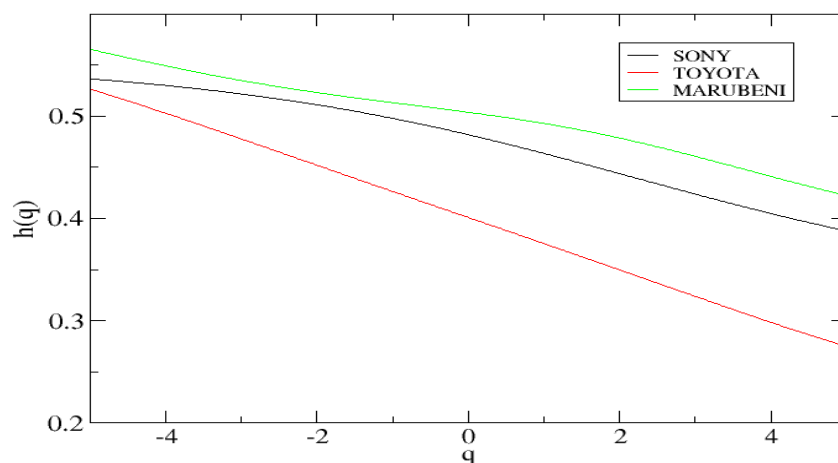


図6 一般化ハースト指数 $h(q)$

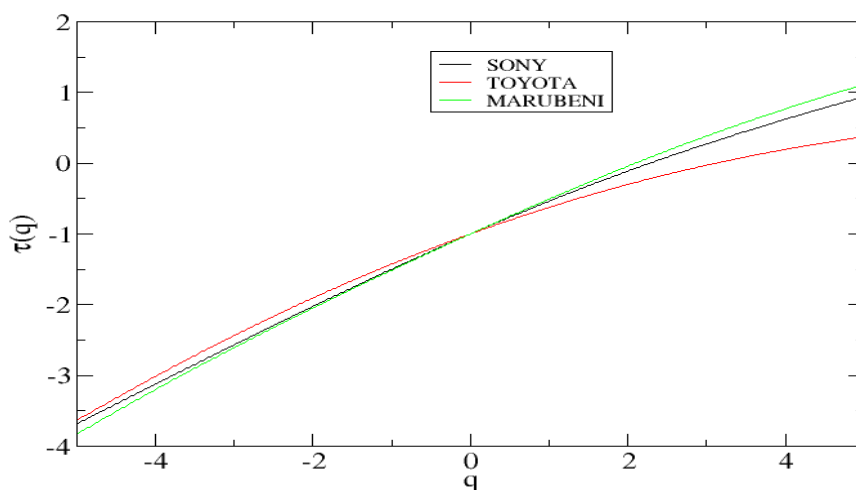


図7 マルチフラクタルスケール指数 $\tau(q)$

$F_q(s)$ から $h(q)$ を決定し、図示したのが図6である。 $h(q)$ は q に依存して変化しており、これは時系列がマルチフラクタル性を持つことを示している。図7は式(23)によって求めたマルチフラクタルスケール指数 $\tau(q)$ である。モノフラクタルの場合、 $\tau(q)$ は直線となるが、図7で示されているように直線からはずれている。このことも、時系列のマル

チフラクタル性を表している。図 8 は式 (27) で与えられる特異性スペクトラム $f(\alpha)$ を図示したものである。モノフラクタル時系列の場合、 α は定数となり、 $f(\alpha)$ は α について幅を持たない関数となるが、図 8 は $f(\alpha)$ は α について広がった関数となっている。 $f(\alpha)$ の結果も時系列のマルチフラクタル性を表している。

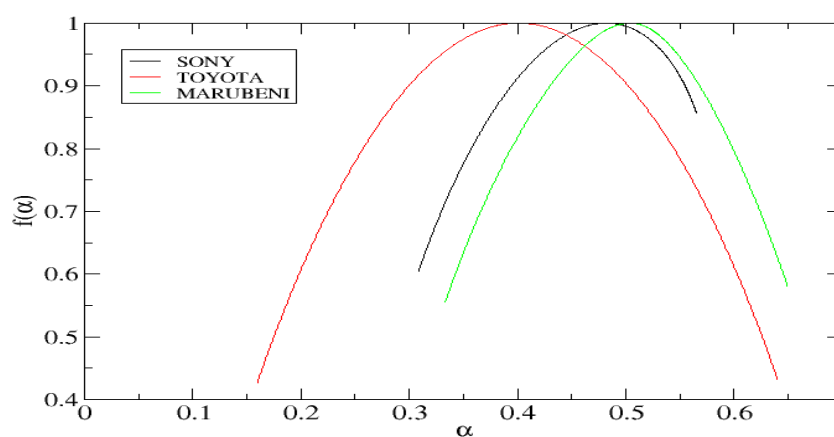


図 8 特異性スペクトラム $f(\alpha)$

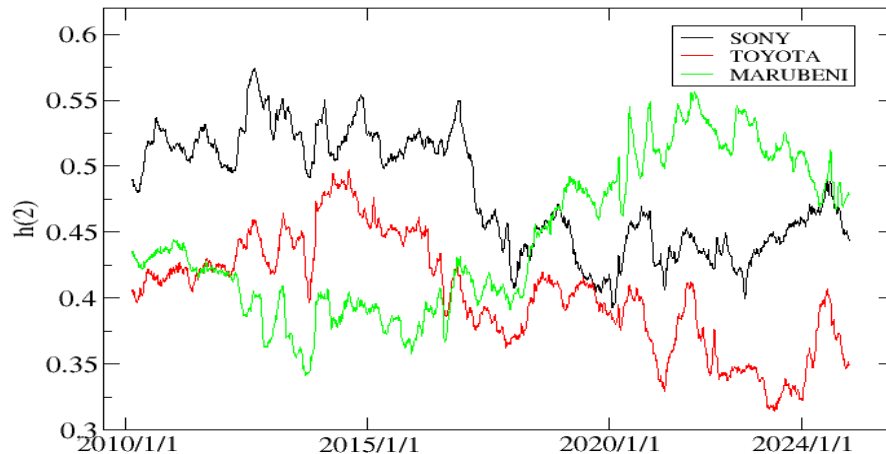


図 9 ハースト指数 $h(2)$ の時間変動

ハースト指数は 2 次の揺らぎに対する一般化ハースト指数 $h(2)$ によって与えられる。図 9 はハースト指数 $h(2)$ の時間変動を表している。ハースト指数は 3 社とも時間変動しており一定ではない。また、 $h(2)=1/2$ はランダム時系列を意味するが、3 社の $h(2)$ は多くの期間について $h(2)<1/2$ となっており、これは時系列が反持続的傾向のあることを示している。特にトヨタの株価は全区間で $h(2)<1/2$ となっている。先進国の株価では反持続的な

ハースト指数となっていることが既存研究[36, 37]で知られているので、日本の株価時系列に反持続性が見られることは不思議ではない。反持続性を示す時系列はランダム時系列よりも価格が上がったり下がったりを繰り返していることを意味している。収益率時系列の一般化ハースト指数は q に関して変動しており、このことは時系列がマルチフラクタルであることを意味している。一般に、多くの金融時系列でマルチフラクタル性が確認されており、ビットコインの収益率についてもマルチフラクタル性が示されている[38]。

5. ビットコインデータ

本研究では Bitstamp 取引所[39]で取引された 2014 年 1 月 1 日～2023 年 5 月 31 日までのビットコイン取引データを利用した。このデータから様々なサンプリング間隔 Δ 分の収益率を構築し、日次実現ボラティリティを計算する。一般に、暗号資産取引所では 24 時間取引が継続しているため、株式市場の様に取引が中断することがない。図 10 は $\Delta=5$ 分で計算した実現ボラティリティの時系列を表している。

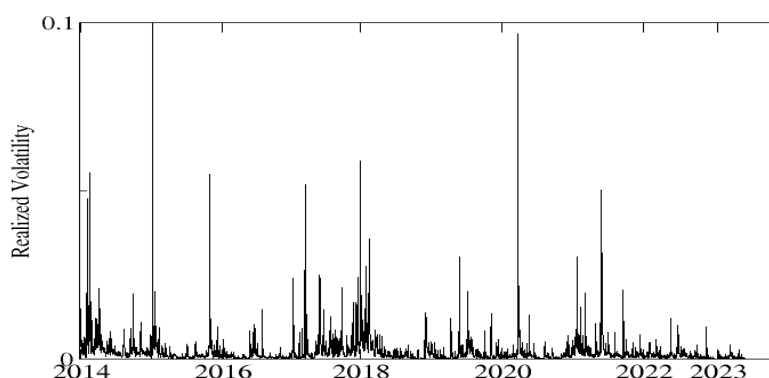


図 10 ビットコイン価格収益率の実現ボラティリティ

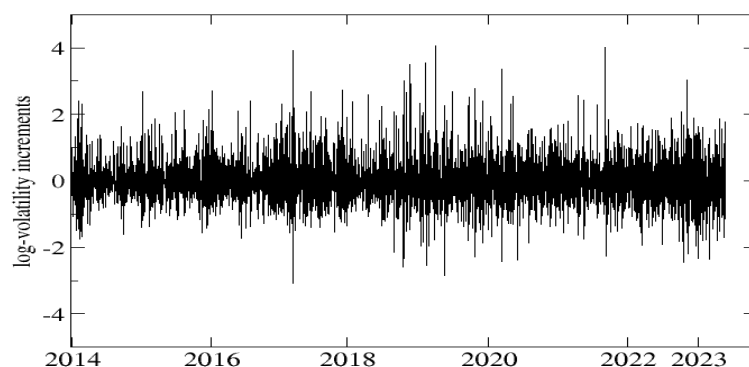


図 11 ビットコインの log-RV increments 時系列

実現ボラティリティから式(10)で表される $\log\text{-RV increments}$ の時系列（増分時系列）を求める。図11は実現ボラティリティから計算した $\log\text{-RV increments}$ の時系列を表している。 $\log\text{-RV increments}$ 時系列の一般化ハースト指数は第4章で説明した MFDEFA 法によって決定する。本研究では、データ区間を8年間として、その区間のデータについて MFDEFA 法によってハースト指数を求める。そして、8年の期間をずらしながら MFDEFA 法を実行し、一般化ハースト指数の時間変動を求める。

6. ビットコインデータによる実証分析

図12は実現ボラティリティの平均値をサンプリング間隔 Δ の関数でプロットしたものである（Volatility Signature Plot）。平均値はマイクロストラクチャーノイズの影響によって Δ が小さくなるにつれて大きくなっている。従って、この場合修正なしの実現ボラティリティの値は真の値よりも過大評価されていると考えられる。一方、 Δ が大きくなると実現ボラティリティの平均値はマイクロストラクチャーノイズの影響が小さくなり、一定値に近づく。

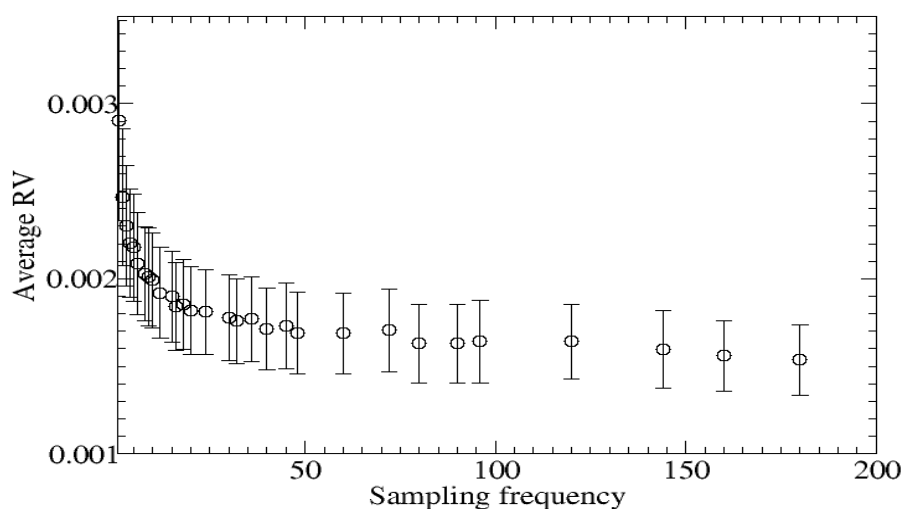


図12 Volatility Signature Plot

図13は実現ボラティリティで標準化した収益率のモーメントを計算した結果をプロットしている。図中の赤実線は4次のモーメントの理論値を表している（式(12)の $k=2$ の場合）。実際に計算した値は Δ が小さくなるにつれて下方にズレている。これは図12から分かるように実現ボラティリティが過大評価されているため、実現ボラティリティで標準化した収益率は過小評価となり、その結果モーメント値も過小評価となっていることを表している。

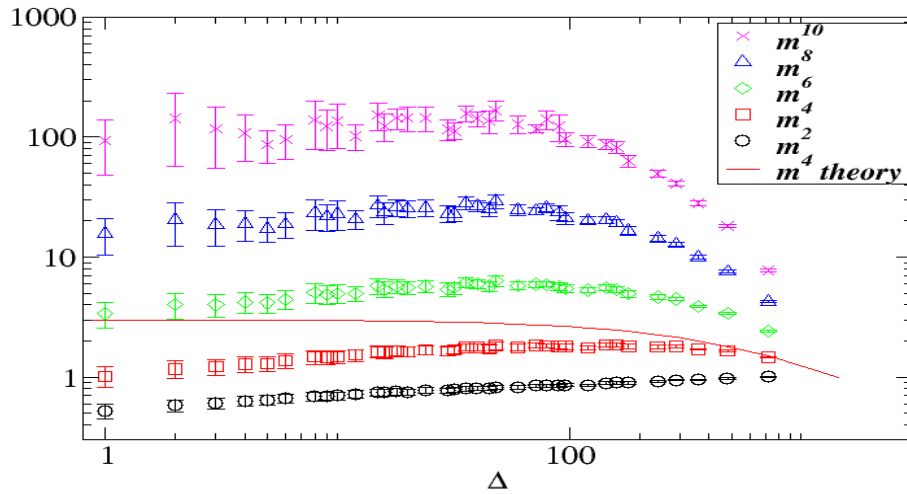


図 13 標準化された収益率のモーメント。ここで、 $m^{2k} \equiv E[r^{2k}]$ としている。

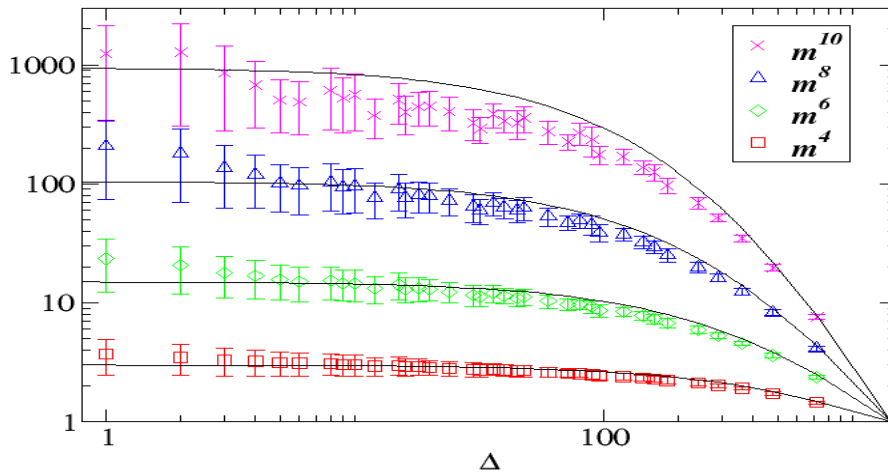


図 14 標準化された収益率のモーメントを 2 次のモーメントで規格化した値。ここで、 $m^{2k} \equiv E[r^{2k}]/E[r^2]^k$ としている。

図 14 は式 (1 4) で表されるモーメントを 2 次モーメントのべき乗で割った値 ($E[r^{2k}]/E[r^2]^k$) をプロットしている。図中の実線は式 (1 3) からの理論値を表している。実線の理論値と式 ($E[r^{2k}]/E[r^2]^k$) で計算した値は非常によく一致を示している。

図 15 は式(1 4)と(1 5)で対応するモーメントの比をプロットしている。図中の実線は式(1 4)と(1 5)で表される理論値であるが、この場合も計算値とよく一致している。マイクロストラクチャーノイズが $\overline{RV}_{t,\Delta} = cRV_{t,\Delta}$ のように定数のスケールファクター c で修正さ

れると考えられる場合はこれらの結果（図 14 と 15）を説明することができる。その場合、式（10）で表される **log-RV increments** の時系列は修正ファクターの影響を受けない、つまりマイクロストラクチャーノイズの影響を受けないことになる。

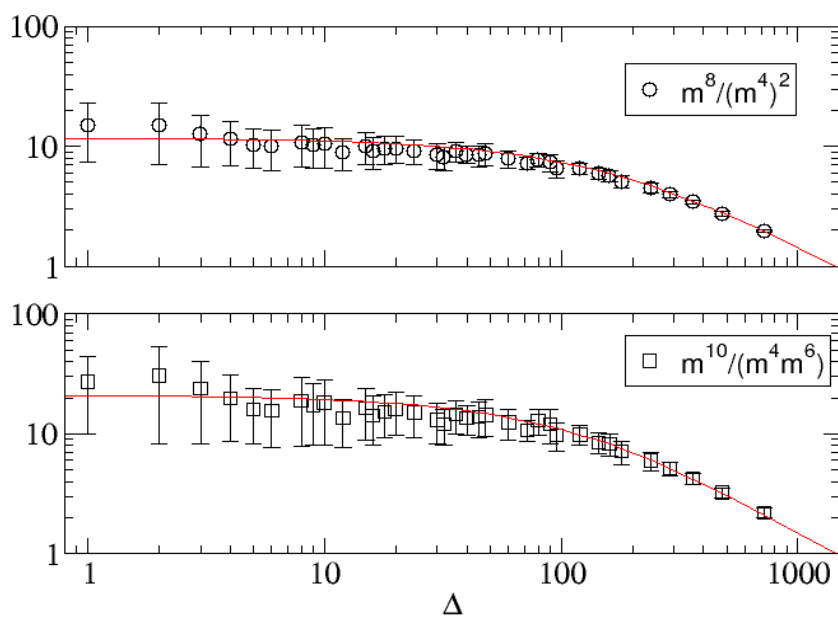


図 15 (上) $\frac{E[r^8]}{E[r^4]^2}$ (下) $\frac{E[r^{10}]}{E[r^6]E[r^4]}$

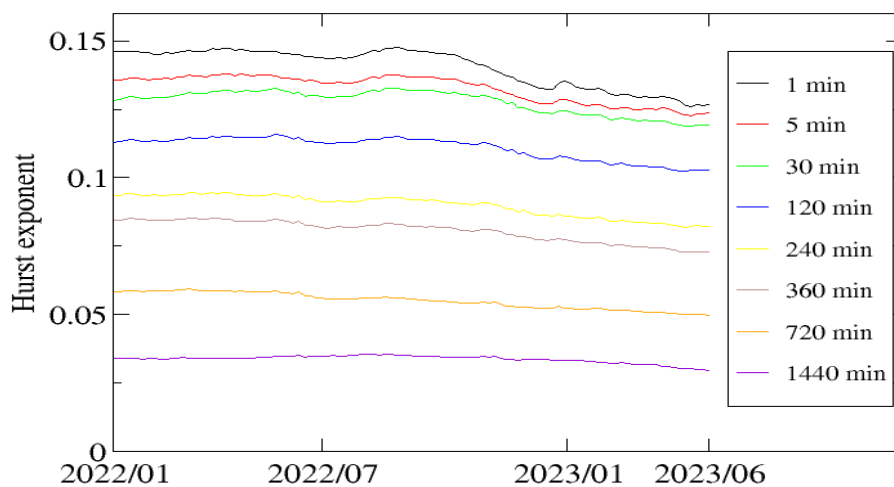


図 16 様々なサンプリング間隔におけるハースト指数の時間変動

図 16 は様々なサンプリング間隔で計算した実現ボラティリティ時系列についてハースト指数を計算し、時間変動をプロットしたものである。図を見るとサンプリング間隔が大きくなるとハースト指数が小さくなる傾向が見られる。

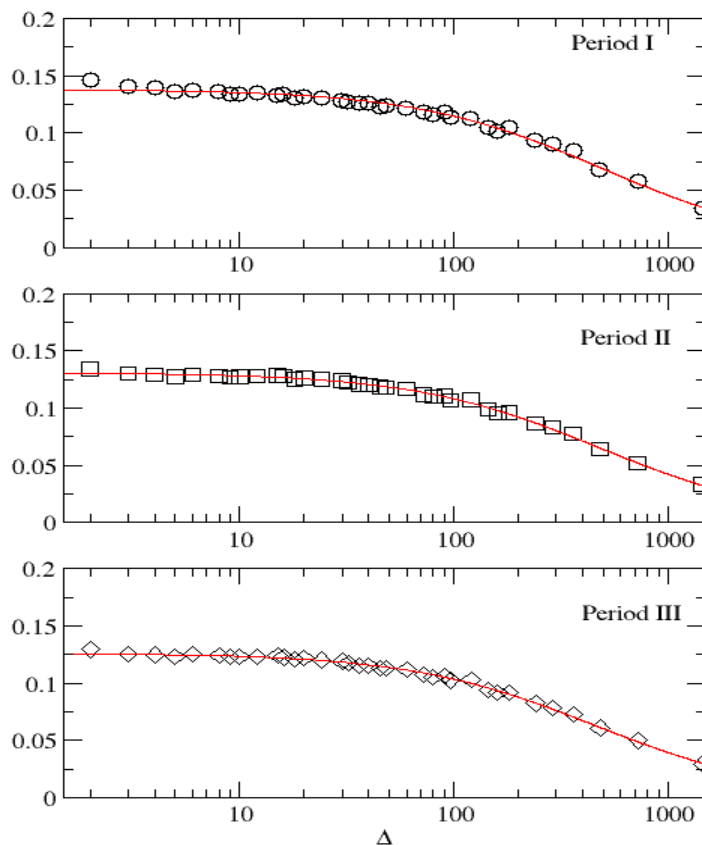


図 17 ハースト指数のサンプリング間隔依存性

ハースト指数のサンプリング間隔依存性を詳しく調べるために、3つの期間を選び、その期間におけるハースト指数のサンプリング間隔依存性を調べた。3つの期間は表 1 に提示してある。図 17 はハースト指数をサンプリング間隔の関数で図示したものである。サンプリング間隔が大きくなるとハースト指数は減少している。一方、サンプリング間隔が小さくなるとハースト指数は大きくなり、 Δ がゼロの極限である値に収束しているように見える。ハースト指数に対する有限サンプル効果については、式 (12) のような理論式は知られていないが、式 (12) から推測して、以下の式を仮定してフィッティングを試みる。

$$H(\Delta) = H_0 \frac{n}{n+a} \quad (30)$$

ここで、 H_0 と a はフィッティングパラメータである。また、 $n = 1440/\Delta$ である。式（30）によってフィッティングした結果は図 17 の実線で表されており、データと良い一致を示している。フィッティングによって得られたパラメータ値は表 1 にまとめてある。 Δ がゼロの極限での値である H_0 は $H_0 \approx 0.12 - 0.14$ 程度となっており、ラフボラティリティの性質($H < 1/2$)を示している。

表 1：データ期間とフィッティング結果

期間	H_0	a
I: 2014/1/2--2022/1/2	0.1379(8)	2.93(11)
II: 2015/1/1--2023/1/1	0.1308(4)	3.02(6)
III: 2015/5/27--2023/5/27	0.1262(3)	3.15(6)

式（30）より $(H_0 - H(\Delta))/H_0$ で定義される H_0 に対する相対誤差 $E(\Delta)$ は

$$E(\Delta) = \frac{a}{n+a} \quad (31)$$

で与えられる。表 1 の a の値を利用して $E(\Delta)$ をプロットしたのが図 18 である。

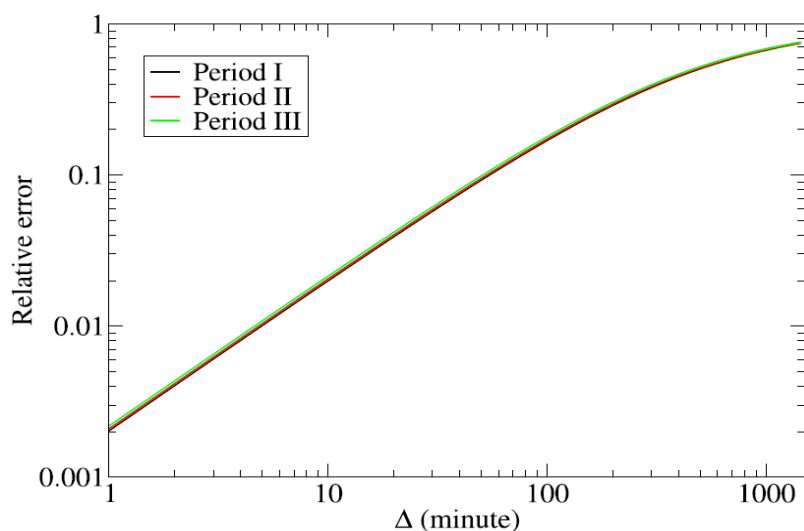


図 18 相対誤差 $E(\Delta)$

Δ が大きくなると相対誤差は大きくなるが、実現ボラティリティの計算でよく利用されている $\Delta=5$ 分での相対誤差は 1%程度となる。従って、実証分析で良く利用される $\Delta=5$ 分の実現ボラティリティにおけるハースト指数のバイアスは小さいと言える。

7. マルチフラクタル性

ボラティリティ時系列のマルチフラクタル性について調べるために、MF DFA 法によって一般化ハースト指数 $h(q)$ を計算した。マルチフラクタル性が存在する場合、 $h(q)$ は q によって変化する。 $h(q)$ が一定の場合、時系列はモノフラクタルであると言われる。図 19(a) は $h(-3)$, $h(2)$ 及び $h(3)$ をプロットしたものである。 $h(q)$ は q によって変化しており、マルチフラクタル性の存在を示している。マルチフラクタル性の強さは式 (28) の $\Delta h(q)$ で定義する。マルチフラクタル性がない場合、 $\Delta h(q)$ はゼロとなる。

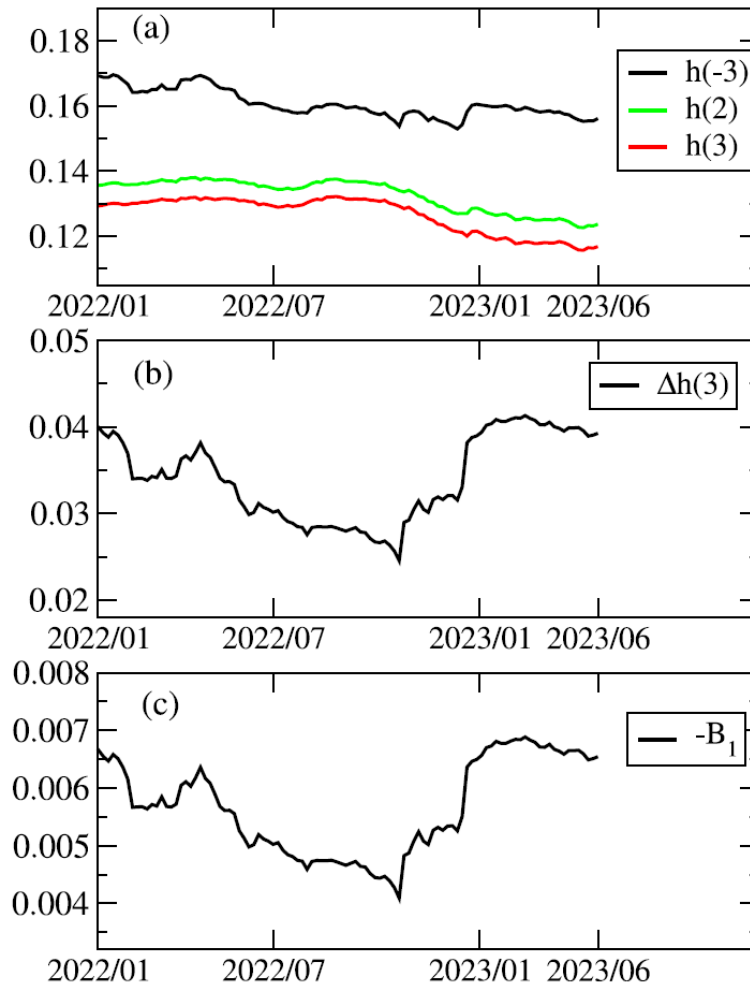


図 19 (a) $h(-3)$, $h(2)$ 及び $h(3)$ (b) $\Delta h(3)$ (c) $-B_1$ の時間変動

図 19(b) は $\Delta h(3)$ の時間変動をプロットしたものである。 $\Delta h(3)$ は時間と共に変動しており、マルチフラクタル性の強さが時間変動していることを示している。図 19(c) の B_1 は $h(q)$ をテイラー展開した時の 1 次の係数である。 $h(q)$ を 1 次までテイラー展開すると以下になる。

$$h(q) \approx h(0) + B_1 q \quad (32)$$

マルチフラクタル性がない場合、 $h(q)$ は q に依存せず一定値となることから、その場合 B_1 はゼロとなる。従って、 B_1 もマルチフラクタル性の強さを表す指標となる。 B_1 の時間変動も $\Delta h(3)$ と同様の振る舞いをしている。

8. 量子回路学習(Quantum Circuit Learning)によるボラティリティのモデル化

第2章で論じたように、一般にボラティリティのモデル化では金融時系列の性質を反映するようにモデル化（具体的には関数形を仮定）する。様々な関数形が考案されているがどの関数形が良いかはケースバイケースで一概には言えない。ここでは、陽に関数形を仮定する必要のない量子回路によるモデル化によってビットコイン実現ボラティリティのモデル化を行う。量子回路によるモデル化はMitarai et al.[40]による量子回路学習によって提案された。量子回路学習ではパラメータ化された量子回路によって関数を近似する。図20は量子回路学習の模式図である。

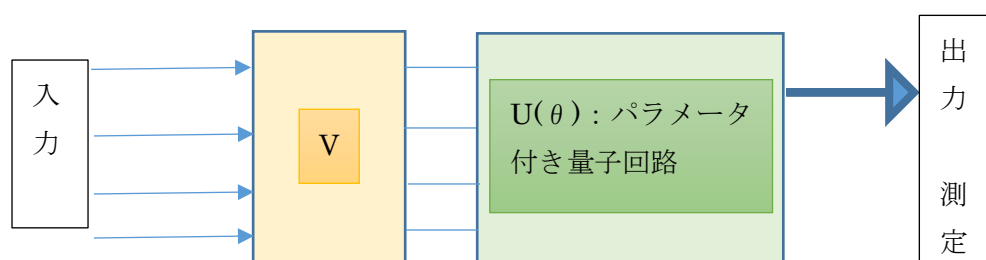


図 20 量子回路学習の模式図

V はデータを入力する量子回路を表し、入力データは V によって量子回路に入力される。 $U(\theta)$ はパラメータ付きの量子回路を表す。 $U(\theta)$ はユニタリー変換に対応し、その表現力が高ければボラティリティ関数を十分に近似できると考えられる。もともと、量子回路学習は量子コンピュータ用のアルゴリズムとして開発されたものであるが、本研究ではIBMのQiskit[41]によってシミュレーションを実行する。

$U(\theta)$ として様々な量子回路を取ることができるが、一番簡単な量子回路として1量子ビットによる量子回路が考えられる。図21は本研究で用いた1量子ビットによる量子回路である。

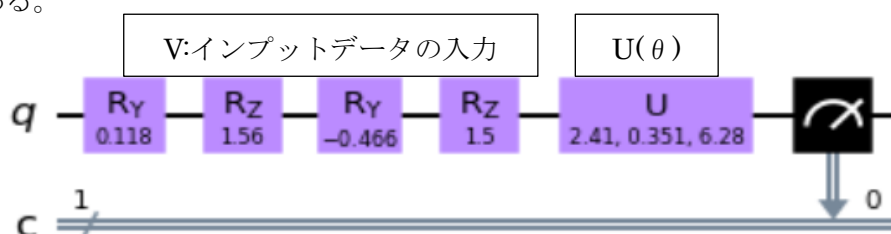


図 21 1量子ビット量子回路

Ry 及び Rz で表される量子ゲートはデータを入力する部分に対応し、インプットデータは角度エンコーディングによって量子回路に入力する。U(θ)は3つのパラメータを持つユニタリー行列で表される回路を用いた。具体的には、U(θ)は2x2のユニタリー行列で表され、以下の表現を用いた。

$$U(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & -e^{i\lambda}\sin\theta/2 \\ e^{i\phi}\sin\theta/2 & e^{i\lambda+i\phi}\cos\theta/2 \end{pmatrix} \quad (33)$$

図22は2量子ビットによる量子回路の例である。この量子回路は6つのパラメータを持つ。パラメータ数が増えることによってより表現力が高くなると考えられる。

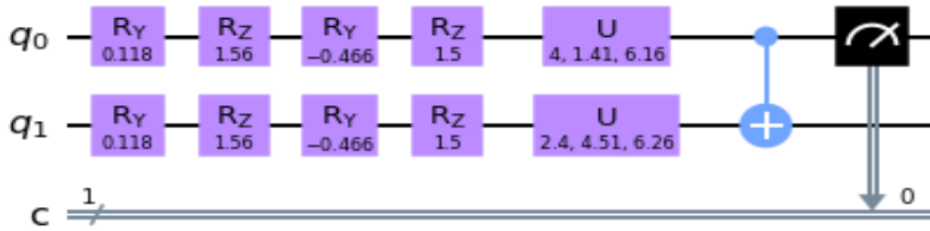


図22 2量子ビット量子回路

まず、量子回路モデルのテストとして、GARCH(1,1)モデル

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \alpha r_t^2 + \beta \sigma_t^2, \quad (34)$$

$$R_{t+1} = \sigma_t \epsilon_t \quad \epsilon_t \sim N(0,1) \quad (35)$$

によって人工的に時系列を生成し、その時系列をインプットデータとして量子回路モデルがボラティリティ時系列を表すことができるかどうか確かめた。

図23はGARCHモデルによって生成した(a)収益率時系列と(b)ボラティリティ時系列である。時系列長はT=730(2年間に対応)である。ここでは、パラメータは $\alpha=0.1$, $\beta=0.85$, $\omega=0.24$ を設定して時系列を生成した。

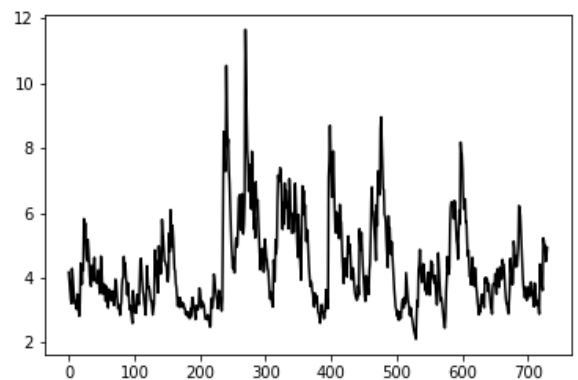
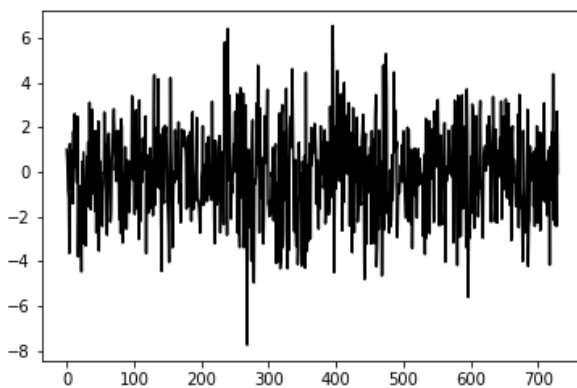


図23 (a) GARCHモデルによる収益率

(b) GARCHモデルによるボラティリティ

量子回路に収益率 R_t とボラティリティ σ_t^2 を入力し、出力値（推定値） $\bar{\sigma}_{t+1}^2$ を得る。入力値は角度の情報として入力するため、 $(-1, 1)$ の間になるようにスケールさせてから入力した。この出力値と入力データ（教師データとして利用）のボラティリティとの差を小さくするために、以下で定義される **cost function** を最小化するように $U(\theta)$ のパラメータを最適化する。

$$\text{cost function} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\sigma_t^2 - \bar{\sigma}_t^2)^2 \quad (36)$$

最適化には COBYLA を用いた。

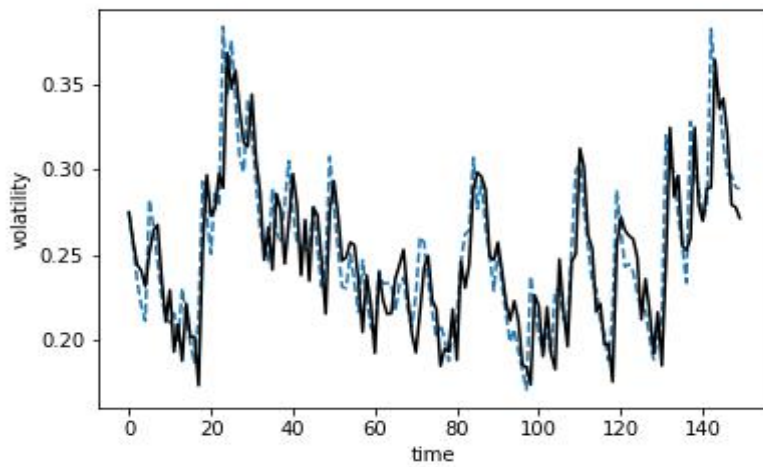


図 24 量子回路モデルによる出力値（破線）と入力値（実線）

図 24 は COBYLA による最適化後のボラティリティ出力値（破線）とボラティリティ入力値（実線）との比較である。データは初めの 150 個のデータを表示してある。量子回路による出力値とボラティリティ入力値の時間変動はよく似ており、量子回路モデルがボラティリティの変動を良く捉えていることが分かる。GARCH モデルによる人工時系列データを利用した量子回路モデルによる推定の結果は[42]でも報告を行っている。

次に、実データを利用して量子回路モデルによる推定を実行する。ボラティリティ時系列はビットコインの実現ボラティリティデータを利用した。利用したデータは Bitstamp 取引所で 2021 年 3 月 1 日～2023 年 2 月 28 日の 2 年間に取引されたデータである。実現ボラティリティは 5 分ごとにサンプルされた価格データから作成した。図 25 は (a) 日次収益率データ R_t , (b) 日次実現ボラティリティ RV_t を図示している。

収益率データ R_t と実現ボラティリティデータ RV_t を量子回路に入力し、出力値 $\overline{RV}_t$ を得る。そして、GARCH モデルでの推定と同様に、以下の **cost function** を最小化するように $U(\theta)$ のパラメータを最適化する。

$$\text{cost function} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (RV_t - \overline{RV}_t)^2 \quad (37)$$

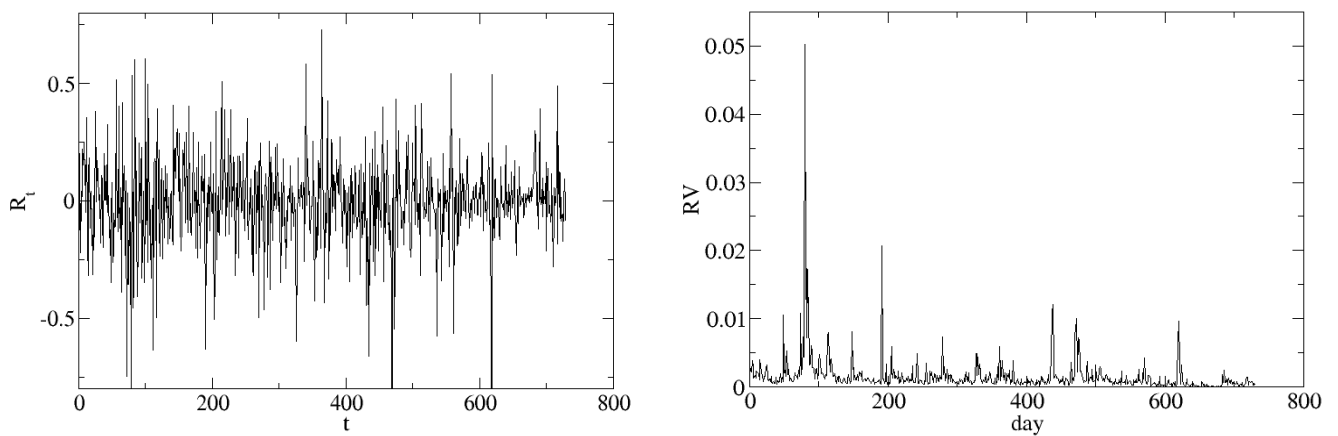


図 25 (a) ビットコイン収益率

(b) ビットコイン実現ボラティリティ

図 26 は最適化後の実現ボラティリティ値（赤線）と入力値（黒線）との比較である。図 26(b)は細かい変動が良く見えるように初めの 250 データのみをプロットしている。実現ボラティリティの時系列は GARCH モデルの時系列よりも変動が細かく、推定値は入力値と十分に一致していない所も多いが、大まかな時間変動は量子回路モデルで捉えられている。

量子回路モデルの予測時系列の性質を調べるために、最適化後の $U(\theta)$ のパラメータを利用して、50000 個の予測時系列データを生成した。図 27 では、予測時系列の初めの 3270 個の予測データ（赤線）プロットしている。黒線のデータは入力値（730 個）を表している。

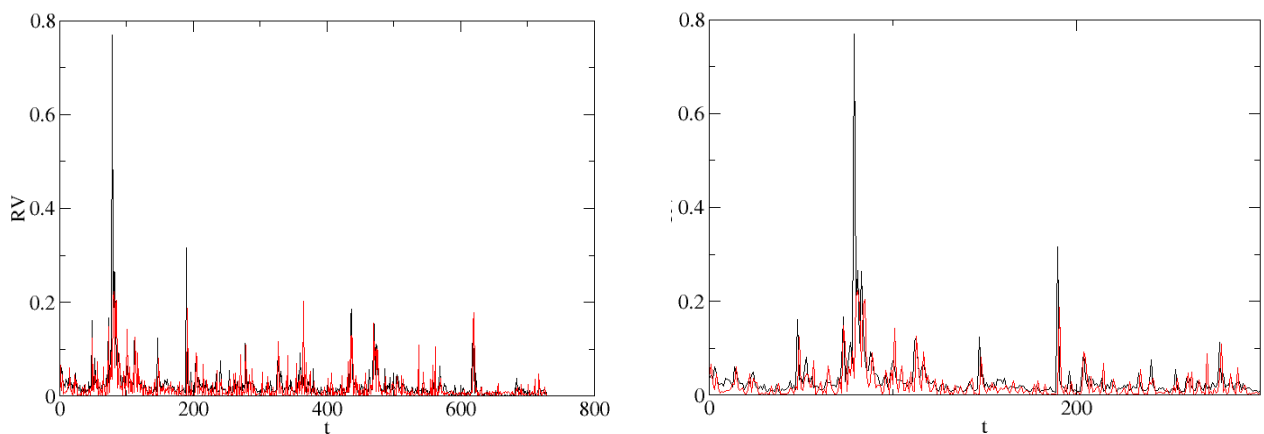


図 26 量子回路モデルによる実現ボラティリティ推定値（赤線）と入力値（黒線）

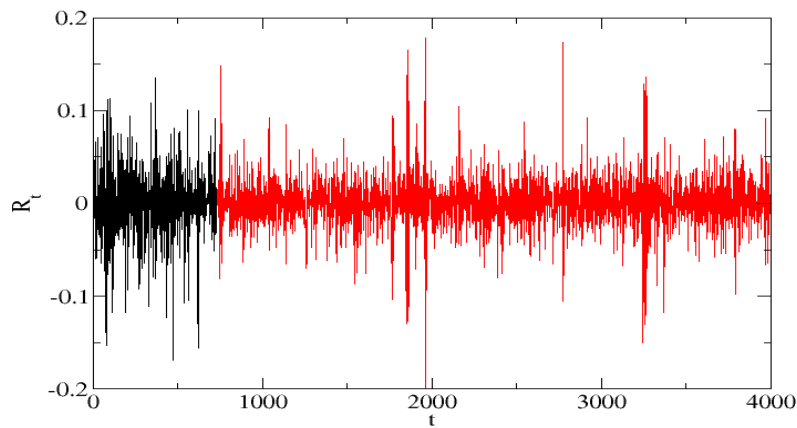


図 27 量子回路モデルによる収益率予測時系列（赤線）

図 28 は量子回路モデルによる実現ボラティリティの予測時系列（赤線）をプロットしたものである。黒線のデータは入力時系列を表している。実現ボラティリティの予測時系列は値が大きくなる期間や小さい期間が現れており、ボラティリティクラスタリングの性質を再現している。

予測時系列のハースト指数やマルチフラクタル性について調べるために第 3 章で記述した MFDFA 法によって一般化ハースト指数を計算した。一般化ハースト指数は 2 年間の区間（730 個）で計算し、区間をずらしながら 50000 個の予測データについて計算を行った。図 29 は収益率時系列のハースト指数 $h(2)$ の時間変動を表している。赤線はランダム時系列のハースト指数である $1/2$ を表している。ハースト指数は $1/2$ を中心に変動しており、収益率時系列はランダム時系列に近い性質を持つと思われる。

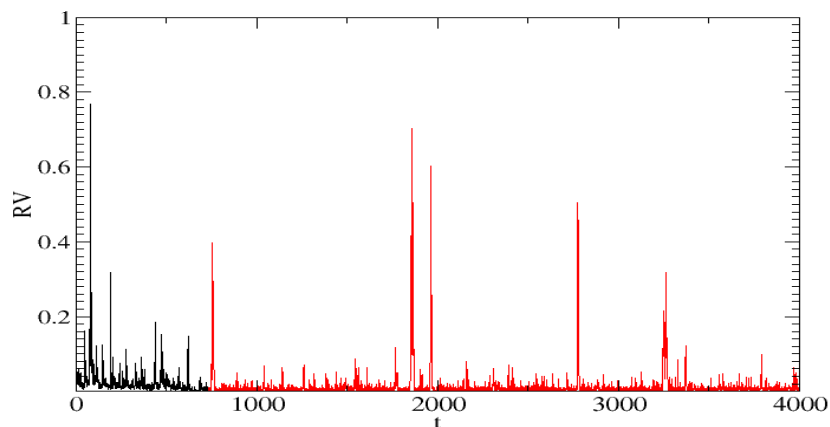


図 28 量子回路モデルによる実現ボラティリティ予測値（赤線）

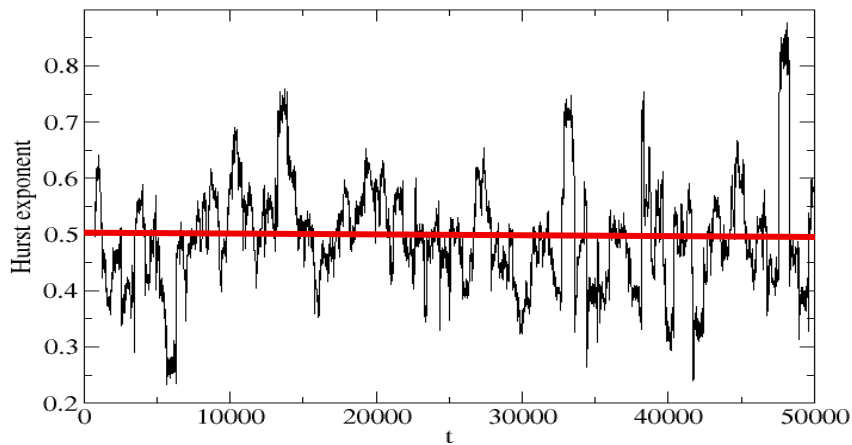


図 29 量子回路モデルによる収益率予測時系列のハースト指数

次に、実現ボラティリティ予測時系列のハースト指数を決定した。ボラティリティ予測時系列は式 (10) によってボラティリティ増分時系列に変換した後、ハースト指数を決定した。図 30 はボラティリティ増分時系列を表している。この増分時系列に対し、MFDEFA 法を利用して一般化ハースト指数を計算した。区間は同様に 2 年間とし、区間をずらしながら計算を行った。図 31 はボラティリティ増分時系列のハースト指数である。ハースト指数の値は $0.05 \sim 0.1$ を中心に時間変動をしている。ハースト指数の値は $1/2$ 以下となっており、この結果はボラティリティ時系列がラフボラティリティの性質を持つことを示しており、ビットコイン実現ボラティリティ時系列のハースト指数に関する既存研究とも一致している[18]。

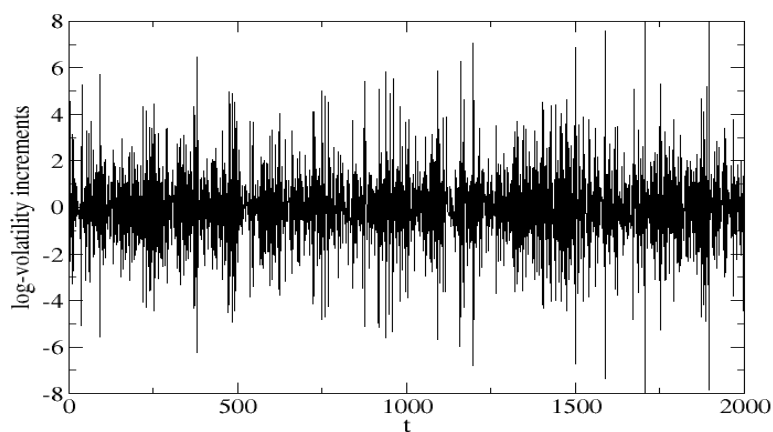


図 30 ボラティリティ増分時系列

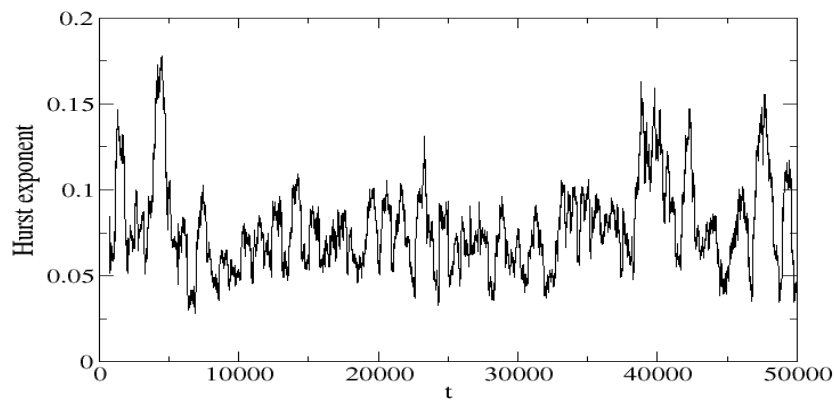


図 31 ボラティリティ増分時系列のハースト指数

図 32(a)は量子回路モデルによる収益率予測時系列の最初の 1 つの区間における一般化ハースト指数（赤線）を図示している。黒線はインプットデータの収益率時系列の一般化ハースト指数である。一般化ハースト指数は q について変化しており、マルチフラクタル性を示している。収益率時系列におけるマルチフラクタル性の存在は既存研究で一般的に知られており、また第 4 章での個別株の結果とも一致する。

図 32(b)は量子回路モデルによるボラティリティ増分時系列の一般化ハースト指数（赤線）を図示している。黒線はインプットデータの実現ボラティリティ時系列から計算した一般化ハースト指数である。一般化ハースト指数は q に対して変化しおり、ボラティリティ増分時系列にもマルチフラクタル性が存在することを示している。

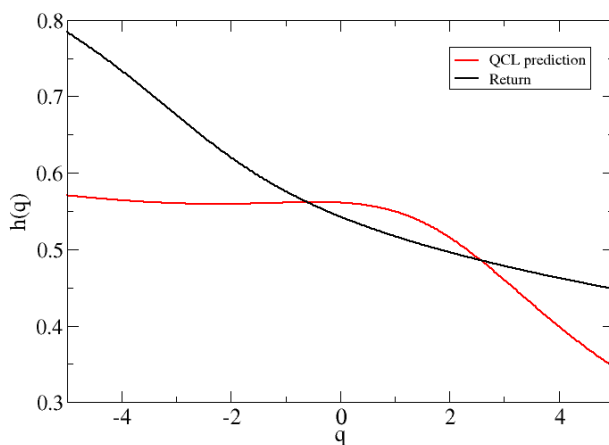
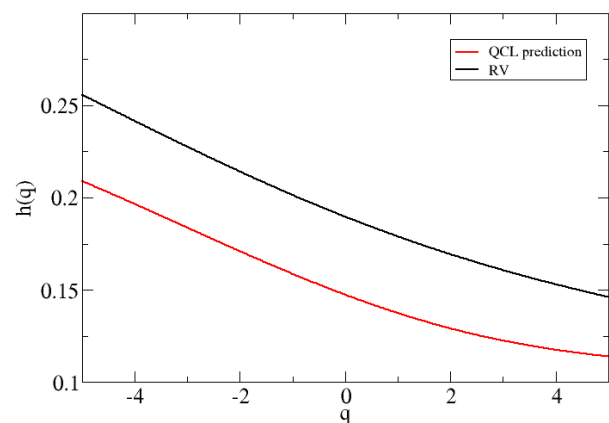


図 32 (a)収益率時系列の $h(q)$



(b)ボラティリティ時系列の $h(q)$

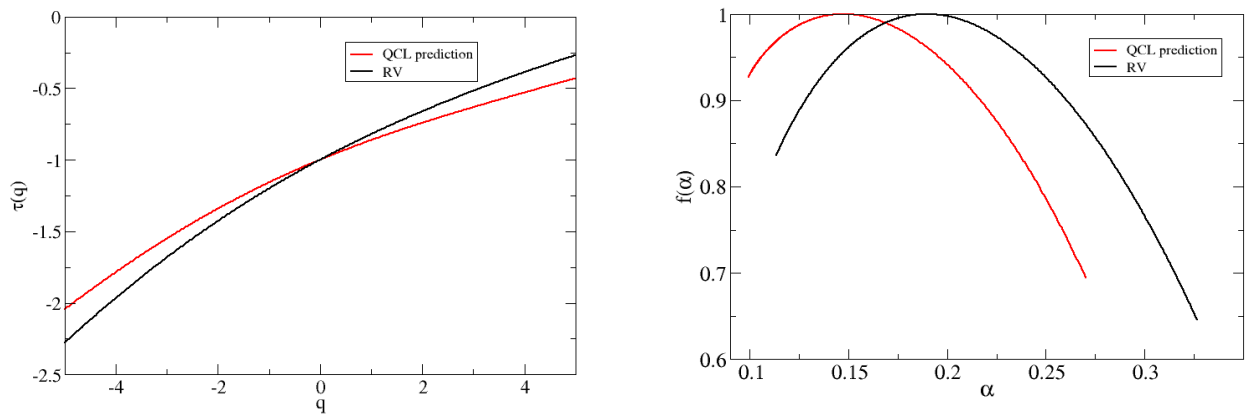


図 33 (a) マルチフラクタルスケール指数 $\tau(q)$ (b) 特異性スペクトラム $f(\alpha)$

更にボラティリティ時系列のマルチフラクタル性について調べるために、マルチフラクタルスケール指数 $\tau(q)$ 及び特異性スペクトラム $f(\alpha)$ について計算を行った。 $\tau(q)$ は式 (2.3) また $f(\alpha)$ は式 (2.7) で定義される。図 33(a) は $\tau(q)$ を図示している。マルチフラクタル性がない場合は、 $\tau(q)$ は直線となるが、量子回路モデルによる実現ボラティリティ時系列及びインプットデータに利用した実現ボラティリティ時系列ともに直線からずれており、これは時系列にマルチフラクタル性があることを示している。同様に、図 33(b) は実現ボラティリティ時系列の $f(\alpha)$ を図示しており、マルチフラクタル性がない場合、 $f(\alpha)$ は α について幅を持たないが、図は α について広がった $f(\alpha)$ であることを示している。このことも時系列のマルチフラクタル性の存在を示している。

9. 結論¹

ボラティリティ時系列のハースト指数が $1/2$ 以下、従ってボラティリティ時系列が反持続性を持つということが Gatheral et al.によって指摘されて以降、ボラティリティ時系列をハースト指数が $1/2$ 以下の性質を持つ非整数ブラウン運動などを基にしてモデル化を行う研究が活発になっている。その一方、市場で観測される実現ボラティリティにはマイクロストラクチャーノイズや有限サンプル効果によるバイアスがあり、バイアスがどのようにハースト指数の測定に影響を与えるかは分かっていなかった。本研究では、暗号資産市場でもっとも代表的なビットコインの実現ボラティリティについて、バイアスの影響を調べた。また、Gatheral et al.による研究では、ボラティリティ時系列はモノフラクタル時系列としているが、マルチフラクタル性を持つという研究もあり、マルチフラクタル性に

¹ 本稿の結果の一部は[43]において論文としてまとめた。

については詳しく分かっていなかった。本研究では、ボラティリティ時系列のマルチフラクタル性についても研究を行った。

まず、マイクロストラクチャーノイズの影響を調べるために、様々なサンプリング間隔で構築した実現ボラティリティによって標準化した収益率のモーメントを調べた。その結果、実現ボラティリティはマイクロストラクチャーノイズによって過大評価されており、実現ボラティリティで規格化されたモーメントはマイクロストラクチャーノイズの影響で予想される値よりも小さくなっていることが分かった。一方、適切なモーメントの比はマイクロストラクチャーノイズの影響を受けないことが分かった。このことは、実現ボラティリティにおけるマイクロストラクチャーノイズの影響が実効的には定数ファクターで説明できることを示唆している。その場合、対数変換したボラティリティの増分時系列では定数ファクターがキャンセルし、ハースト指数測定には影響を与えないことになる。

有限サンプル効果の影響を調べるために、ハースト指数がサンプリング間隔に依存するかどうか調べた。その結果、ハースト指数はサンプリング間隔に依存し、サンプリング間隔が大きくなるとハースト指数は小さくなることが分かった。そして、この依存性は、簡単な関数形で説明できることを示した。その関数を利用し、実証分析で良く利用される 5 分のサンプリング間隔における相対誤差計算し、ハースト指数値に与える相対誤差の影響は 1%程度であり、小さいことが分かった。

マルチフラクタル性を調べるために、MFDEFA 法によって一般化ハースト指数 $h(q)$ を計算し、ボラティリティ増分時系列のマルチフラクタル性について調べた。その結果、 q について $h(q)$ は一定ではなく、ボラティリティ増分時系列はマルチフラクタル性を示すことが分かった。また、マルチフラクタル性の強さを一般化ハースト指数の変動幅 $\Delta h(3)$ と $h(q)$ のテイラー展開係数 B_1 によって調べたところ、どちらも時間変動しており、マルチフラクタル性の強さは時間変動していることが分かった。

ボラティリティ時系列をモデル化する場合、一般的にはボラティリティ時系列の性質を反映するようにモデル化が行われる。例えば、ボラティリティのラフ性に注目するならば、 $H < 1/2$ の非整数ブラウン運動を用いるなどである。本研究では、モデル化する際に仮定を導入する必要のない量子回路モデルによるボラティリティのモデル化を試みた。ビットコインの実現ボラティリティ時系列を用いて、量子回路モデルによる実証分析を行い、量子回路モデルが予測する収益率及びボラティリティ時系列の性質を調べた。その結果、収益率時系列とボラティリティ時系列のハースト指数及びマルチフラクタル性は既存研究において示されているものと同様のものであることが分かった。本研究で用いた量子回路は単純なものであるため、今後は更に複雑な量子回路によって精度の良い予測ができるかどうか、また既存モデルとの予測精度の比較等を行う必要がある。

参考文献

- [1] Cont, R., 2001. Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues, *Quantitative Finance*, 1, 223–236.
- [2] Engle, Robert F., 1982. “Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation”, *Econometrica* 50 (4), 987-1007.
- [3] Bollerslev, T., 1986. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, 31, 307-327.
- [4] Granger, C. W., 1980. Long Memory Relationships and the Aggregation of Dynamic Models, *Journal of Econometrics*, 14, 227–238.
- [5] Granger, C. W. J. and Joyeux, R., 1980. An Introduction to Long-Memory Time Series Models and Fractional Differencing, *Journal of Time Series Analysis*, 1(1), 15–29.
- [6] Hosking, J. R. M., 1981. Fractional Differencing, *Biometrika*, 68(1), 165–176.
- [7] Baillie, R. T., 1996. Long Memory Processes and Fractional Integration in Econometrics”, *Journal of Econometrics*, 73(1), 5–59.
- [8] Hurst, H. E., 1951. Long-Term Storage Capacity of Reservoirs, *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 116(1), 770–799.
- [9] Comte, F. and Renault, E., 1996. Long Memory Continuous Time Models, *Journal of Econometrics*, 73(1), 101–149.
- [10] Comte, F. and Renault, E., 1998. Long Memory in Continuous-Time Stochastic Volatility Models”, *Mathematical Finance*, 8(4), pp.291–323.
- [11] Cheridito, P., Kawaguchi, H., and Maejima, M., 2002. Fractional Ornstein-Uhlenbeck Processes, *Electronic Journal of Probability*, 8,.
- [12] Comte, F., Coutin, L., and Renault, E., 2012. Affine Fractional Stochastic Volatility Models, *Annals of Finance*, 8(2-3), 337–378.
- [13] Gatheral, J., Jaisson, T., Rosenbaum, M., 2018. Volatility is rough. *Quantitative Finance* 18, 933–949.
- [14] Al’os, E., Le’on, J. A., and Vives, J., 2007. On the short-time behavior of the implied volatility for jump-diffusion models with stochastic volatility, *Finance and stochastics*, 11(4), 571–589.
- [15] Fukasawa, M., 2011. Asymptotic Analysis for Stochastic Volatility: Martingale Expansion”, *Finance and Stochastics*, 15(4), 635–654.
- [16] Livieri, G., Mouti, S., Pallavicini, A., and Rosenbaum, M., 2018. Rough volatility: evidence from option prices. *IIE transactions*, 50, 767–776.
- [17] Bennedsen, M., Lunde, A., and Pakkanen, S. M., 2022. Decoupling the short and long-term behavior of stochastic volatility. *Journal of Financial Econometrics*, 20, 961–1006.
- [18] Takaishi, T., 2020. Rough volatility of Bitcoin. *Finance Research Letters*, 32, 101379.

- [19] Fukasawa, M., Takabatake, T., and Westphal, R., 2019. Is volatility rough, arXiv:1905.04852 <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:152282243>.
- [20] Cont, R. and Das, P., 2023. Rough Volatility: Fact or Artefact?, *Sankhya B*, 268, 1–33.
- [21] Sentana, E., 1995. Quadratic ARCH models, *Rev. Econ. Stud.* 62, 639–661.
- [22] Takaishi, T., 2017. Rational GARCH model: An empirical test for stock returns, *Physica A* 473, 451–460.
- [23] Nelson, Daniel B., 1991. Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach, *Econometrica*, 59 (2), 347–370.
- [24] Ding, Z., Granger C.W., and Engle R.F., 1991. A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model. *Journal of Empirical Finance*, 1, 83–106.
- [25] Andersen, T. G. and Bollerslev, T., 1998. Answering the Skeptics : Yes, Standard Volatility Models Do Provide Accurate Forecasts, *International Economic Review*, 39 (4) , 885–905.
- [26] McAleer, M., & Medeiros, and M. C., 2008. Realized Volatility: A Review. *Econometric Reviews*, 27(1–3), 10–45.
- [27] Zhou, B., 1996. High-frequency data and volatility in foreign-exchange rates, *Journal of Business & Economic Statistics*, 14, 45–52.
- [28] Hansen, P.R., and Lunde, A., 2005. A forecast comparison of volatility models: does anything beat a GARCH(1, 1)? *Journal of applied econometrics*, 20, 873–889.
- [29] Takahashi, M., Omori, and Y., and Watanabe, T., 2009. Estimating stochastic volatility models using daily returns and realized volatility simultaneously. *Computational Statistics & Data Analysis*, 53, 2404–2426.
- [30] Takaishi, T., 2018. Bias correction in the realized stochastic volatility model for daily volatility on the tokyo stock exchange, *Physica A* 500, 139–154.
- [31] Andersen, T.G., Bollerslev, T., Diebold, F.X., and Labys, P., 2000. Exchange rate returns standardized by realized volatility are (nearly) gaussian, *Multinational Finance Journal* 4, 159–179.
- [32] Peters, R.T., and De Vilder, R.G., 2006. Testing the continuous semimartingale hypothesis for the s&p 500. *Journal of Business & Economic Statistics*, 24, 444–454.
- [33] Takaishi, T., 2012. Finite-sample effects on the standardized returns of the Tokyo Stock Exchange. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 65, 968–973
- [34] Kantelhardt, J.W., Zschiegner, S.A., Koscielny-Bunde, E., Havlin, S., Bunde, and A., Stanley, H.E., 2002. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series, *Physica A* 316, 87–114.
- [35] Zunino, L., Tabak, B. M., Figliola, A., Pérez, D., Garavaglia, M., & Rosso, O., 2008. A multifractal approach for stock market inefficiency, *Physica A*, 387(26), 6558–6566.
- [36] Di Matteo, T., Aste, T., and Dacorogna. M.M., 2005. Long-term memories of developed

and emerging markets: Using the scaling analysis to characterize their stage of development, *Journal of Banking & Finance* 29, 827–51.

[37] Takaishi, T., 2022. Time evolution of market efficiency and multifractality of the Japanese stock market, *Journal of Risk and Financial Management*, 15 (1), 31.

[38] Takaishi, T., 2018. Statistical properties and multifractality of Bitcoin, *Physica A: statistical mechanics and its applications* 506, 507-519.

[39] Bitstamp <https://www.bitstamp.net/>

[40] Mitarai, K., Negoro, M., Kitagawa, M., and Fujii, K., 2018. Quantum circuit learning, *Physical Review A*, 98, 032309.

[41] IBM Qiskit <https://www.ibm.com/quantum/qiskit>

[42] 高石哲弥, 2023. 量子回路学習による GARCH 時系列の推定, 情報科学技術フォーラム講演論文集(FIT), 22, 77-78.

[43] Takaishi, T., 2025. Multifractality and sample size influence on Bitcoin volatility patterns, *Finance Research Letters*, 74, 106683