金利スワップのスワップレートについて

鴨　池　　治

発表者コメント

小論は、平成 18 年(2006)夏、伊藤隆康教授(新潟大学経済学部)の東北大学で報告されたセミナーに触発されて、金利スワップのスワップレートがどのように決まるのかを考察したものである。

金利スワップとして、プレーンバニラと呼ばれる固定金利と変動金利のスワップを取り上げ、スワップレートがどのように決定されるかを理論的に分析する。

１　**金融資産は３種類存在し、原資産として、満期まで t 期 $(t=1,2,...,T)$ の国債現物と短期金融資産を考える。国債は、簡単化のため、割引債で、現在価格が 1、満期における償還額が R_t $(t=1,2,...,T)$ であるとする。短期金融資産は、毎期平均 L_t $(t=1,2,...,T)$ の金利が付くと仮定する。**

他の 1 つの金融資産は、スワップ契約である。想定元本を A とし、T 期間にわたって、固定金利と変動金利を交換する契約であるとする。固定金利を支払う側は、毎期、ρA の利息を支払い、変動金利を支払う側は、毎期、$L_t A$ $(t=1,2,...,T)$ の利息を支払う。ρ はスワップレートである。

固定金利を支払う側は、現在時点で、t 期満期の国債を $\frac{\rho A}{R_t}$ $(t=1,2,...,T)$ 買えば、償還額による利息の支払いが可能となる。つまり、固定金利の支払いにかかる現在時点でのコストは、

$$P_F=\rho A\sum_{t=1}^{T}\frac{1}{R_t} \qquad ・・・①$$

他方、変動金利を支払う側は、現在から T 期まで短期金融資産を A 保有するとすれば、t 期に、$L_t A$ $(t=1,2,...,T)$ の利息、T 期に元本 A の返済を受けるので、毎期、変動金利 $L_t A$ $(t=1,2,...,T)$ を支払うことができ[1]、T 期の元本 A を返済に充てることにより、現在時点で、T 期満期の国債を $\frac{A}{R_T}$ 空売りすることができる。つまり、変動金利の支払いにかかる現時点でのコストは、

$$P_V=A-\frac{A}{R_T} \qquad ・・・②$$

①＝②として、均衡のスワップレートを

$$\rho=\frac{1-\frac{1}{R_T}}{\sum_{t=1}^{T}\frac{1}{R_t}} \qquad ・・・③$$

のように、求めることができる。

①＞②の場合には、変動金利を支払い固定金利を受け取るスワップ契約を結ぶと、現時点での支払いは P_V であるのに対し、受け取る固定金利を償還時の支払いに充てる国債現物の空売りを行えば、現時点で P_F の受け取りが可能となり、裁定取引の機会が発生する。①＜②の場合は、変動金利を受け取り固定金利を支払うスワップ契約で正の

1　毎期末に $(1+L_t)A$ の返済を受けるが、そのうち A を再投資するものとする。

利益を上げることができ、やはり裁定取引の機会が生じる[2]。

２　t 期に満期になる国債の利回りを $r_t\ (t=1,2,...,T)$ とする。

$$(1+r_t)^t = R_t \quad (t=1,2,...,T) \qquad ・・・④$$

③に代入して

$$\rho = \frac{1-\dfrac{1}{(1+r_T)^T}}{\displaystyle\sum_{t=1}^{T}\frac{1}{(1+r_t)^t}} \qquad ・・・⑤$$

を得る[3]。⑤が T 期間のスワップレートの式であり、

a) r_T だけでなく、$r_t \quad (t=1,2,...T-1)$ にも依存する、

b) 短期金融資産の金利（例えば、LIBOR）には依存しない、

といった特徴を持つ。

３　スワップレートの性質

性質１：国債の利回りが毎期等しい場合、すなわち $r_t = r \quad (t=1,2,...,T)$ のときには、

$$\rho = r$$

となる。

（証明）$r_t = r \quad (t=1,2,...,T)$ のとき

$$\rho = \frac{1-\dfrac{1}{(1+r)^T}}{\displaystyle\sum_{t=1}^{T}\frac{1}{(1+r)^t}} = \frac{1-\dfrac{1}{(1+r)^T}}{\dfrac{1}{1+r}\cdot\dfrac{1-\dfrac{1}{(1+r)^T}}{1-\dfrac{1}{(1+r)}}} = \frac{1}{\dfrac{1}{r}} = r$$

性質２：国債の利回りが順イールドであるとき、すなわち $r_t < r_{t+1} \quad (t=1,2,...,T-1)$ のときには、

$$\rho < r_T$$

が成立する。

2　均衡においては、スワップ契約は redundant な商品であり、国債と短期金融資産を用いて、スワップ契約を交わした場合と同じポジションをもつことができる。

3　ρ は、$r_t\ (t=1,2,...,T)$ の増加関数である。

（証明） $\dfrac{1}{(1+r_t)^t} > \dfrac{1}{(1+r_T)^t} \quad (t=1,2,\dots,T-1)$ なので

$$\sum_{t=1}^{T}\frac{1}{(1+r_t)^t} > \sum_{t=1}^{T}\frac{1}{(1+r_T)^t} = \frac{1}{(1+r_T)}\frac{1-\dfrac{1}{(1+r_T)^T}}{1-\dfrac{1}{(1+r_T)}} = \frac{1-\dfrac{1}{(1+r_T)^T}}{r_T}$$

が成立し、⑤の分母を $\dfrac{1}{\sum_{t=1}^{T}(1+r_T)^t}$ に置き換えて、

$$\rho = \frac{1-\dfrac{1}{(1+r_T)^T}}{\sum_{t=1}^{T}\dfrac{1}{(1+r_t)^t}} < \frac{1-\dfrac{1}{(1+r_T)^T}}{\sum_{t=1}^{T}\dfrac{1}{(1+r_T)^t}} = r_T$$

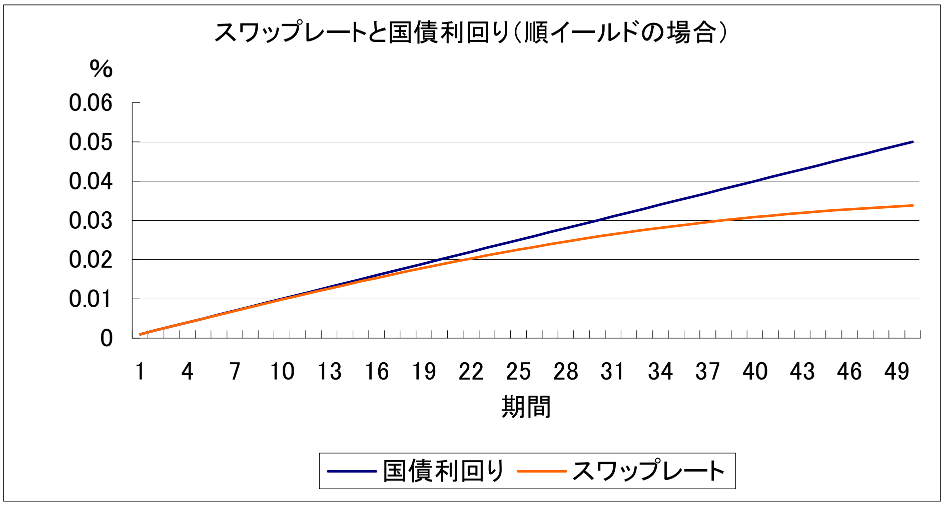
を得る。

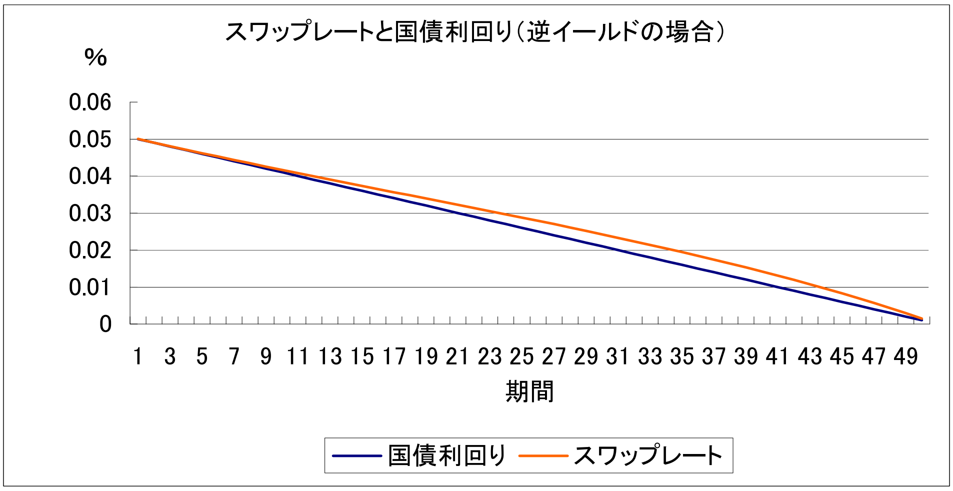
性質３：国債の利回りが逆イールドであるとき、すなわち $r_t > r_{t+1} \quad (t=1,2,\dots,T-1)$ のときには、

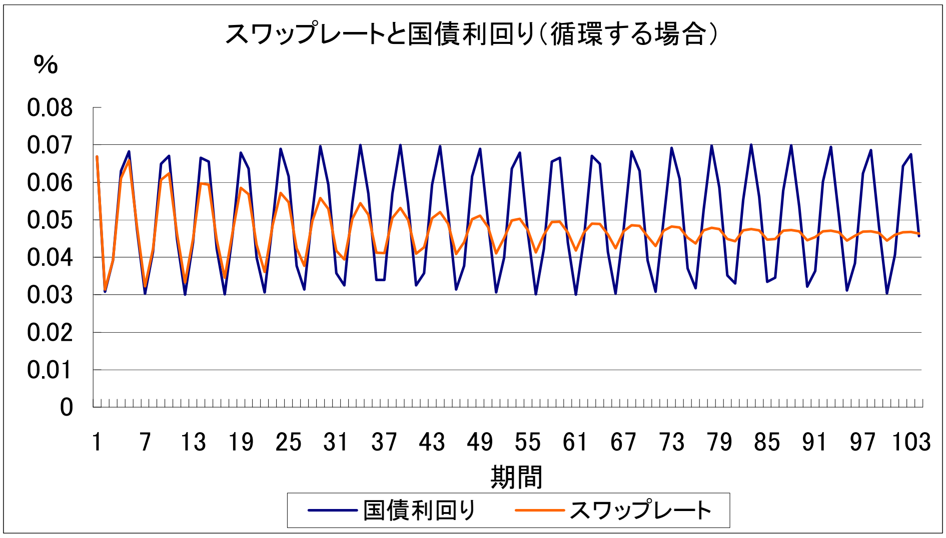
$\rho > r_T$

が成立する。　証明は、性質２のものと同様。

以下、国債の利回りが、順イールドである場合、逆イールドである場合、循環する場合について、理論上のスワップレートがどのように変化するかをグラフで例示する。







４　スワップレートから国債利回りを推定

スワップレートが分かっているとき、その値から国債利回りを推定する問題を考える。T 期間のスワップレート ρ_T と国債利回り r_t （$t=1,2,,...T$）の間には

$$\rho_T = \frac{1-\dfrac{1}{(1+r_T)^T}}{\displaystyle\sum_{t=1}^{T}\frac{1}{(1+r_t)^t}} \qquad \cdots⑤$$

の関係がある。

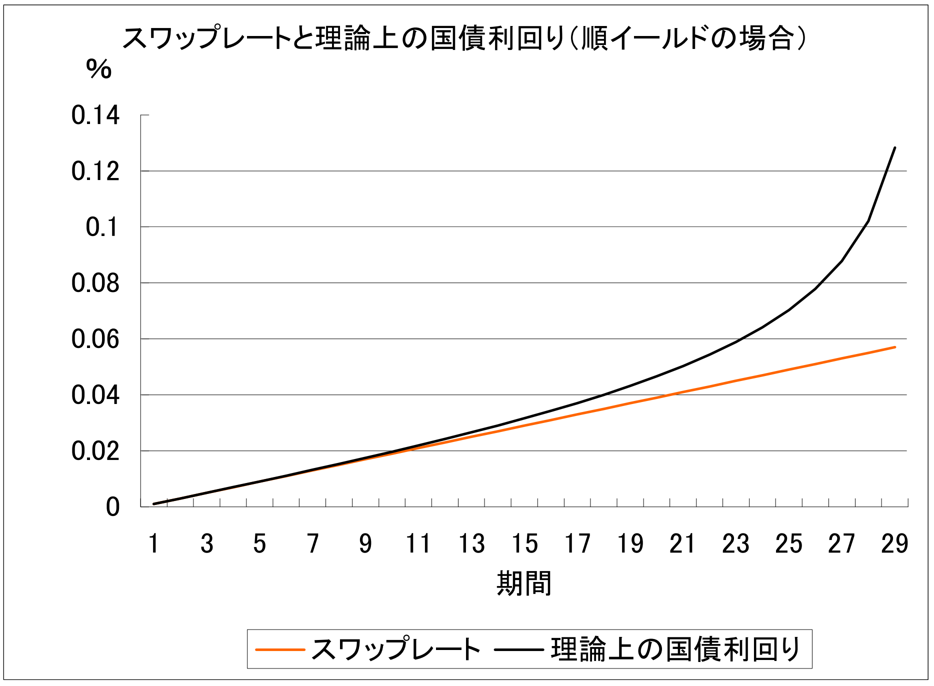
以下、$x_t = \dfrac{1}{(1+r_t)^t}$ とおく。 ・・・⑥

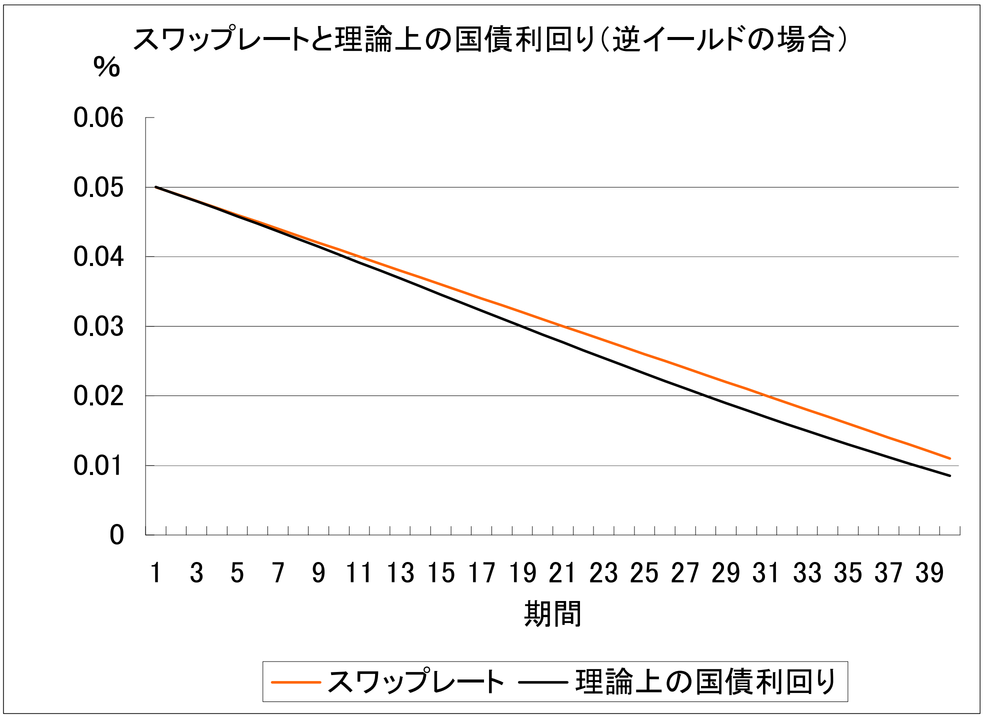
$T=1$ のとき、$\rho_1 = \dfrac{1-x_1}{x_1}$ 　より　$x_1 = \dfrac{1}{1+\rho_1}$ 　つまり　$r_1 = \rho_1$

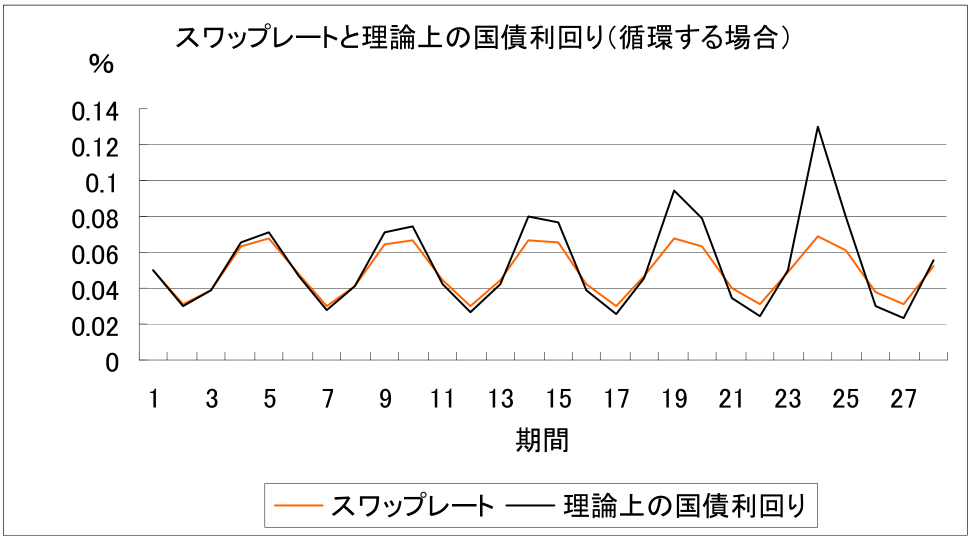
$T=2$ のとき、$(x_1+x_2)\rho_2=1-x_2$　より　$x_2=\dfrac{1+\rho_1-\rho_2}{(1+\rho_1)(1+\rho_2)}$

以下、逐次的に解くことができる。

　以下、スワップレートが、順イールドである場合、逆イールドである場合、循環する場合について、例示的に理論上の国債利回りをグラフで示す。







【参考文献】
伊藤隆康、長期金利と中央銀行、日本評論社、2005 年 10 月。
可児　滋、「デリバティブの落とし穴」、日本経済新聞社、2004 年 5 月。
釜江廣志・北岡孝義・大塚晴之・鈴木喜久、証券論、有斐閣、2004 年 8 月。
Hull, John C., 小林孝雄監訳、「先物・オプション取引入門」、ピアソン・エデュケーション、2001 年 6 月。

（参考）

釜江他では、以下のようにして導かれている。

変動金利受取額の割引現在価値は、

$$V_V = \frac{L_1 A}{1+L_1} + \frac{L_2 A}{(1+L_1)(1+L_2)} + \cdots\cdots + \frac{L_T A}{(1+L_1)\cdots(1+L_T)} + \frac{A}{(1+L_1)\cdots(1+L_T)} \quad ⑦$$

固定金利受取額の割引現在価値は、

$$V_F = \frac{\rho A}{1+L_1} + \frac{\rho A}{(1+L_1)(1+L_2)} + \cdots\cdots + \frac{\rho A}{(1+L_1)\cdots(1+L_T)} + \frac{A}{(1+L_1)\cdots(1+L_T)} \quad ⑧$$

ここで

$$\frac{L_1}{1+L_1} + \frac{L_2}{(1+L_1)(1+L_2)} + \cdots\cdots + \frac{L_T}{(1+L_1)\cdots(1+L_T)} + \frac{1}{(1+L_1)\cdots(1+L_T)} = 1 \quad ⑨$$

であり、

$$(1+L_1)(1+L_2)\cdots(1+L_t) = R_t \qquad ((t = 1,2,\cdots T)$$

が成立するので、

$$V_V = A \quad ⑩$$

$$V_F = \rho A \sum_{t=1}^{T} \frac{1}{R_t} + \frac{A}{R_T} \quad ⑪$$

⑩と⑪を等しいとして

$$1 = \rho \sum_{t=1}^{T} \frac{1}{R_t} + \frac{1}{R_T}$$

したがって

$$\rho = \frac{1 - \dfrac{1}{R_T}}{\displaystyle\sum_{t=1}^{T} \frac{1}{R_t}} \qquad ⑫$$

が導かれる。