銀行救済における公的資金の
最適配分問題とその経済効果

鈴木輝好
北海道大学大学院経済学研究科

概要

本論文では，Ishii, Shi and Suzuki (2014) により提唱された最適資本配分問題における，資本配分の経済効果について議論する．ここで，最適資本配分問題とは，政府が，事前に決められた予算の下で破綻状態にある金融機関あるいは企業に資本注入を行い，経済全体のクレジットロスを最小化させる問題のことである．そして，その経済効果とは，事前に決められた予算が，将来どの程度のクレジットロスを防ぐのか，またどの程度の企業を救うのか等に関する期待値のことである．

本論文の構成は，

1 はじめに
2 金融ネットワークの定義と先行研究の結果
3 資本配分問題
4 資本配分の経済効果

となっている．1 節で問題の背景を述べた後，2 節では先行研究に従って金融ネットワークの定義を与える．また，最適資本配分問題を解く上で重要な諸定理についても述べる．その後，3 節で，最適資本配分問題を定式化し，その解を求めるために提案された「逐次救済アルゴリズム」を示す．そのメカニズムは単純で，効率の高い企業から順に資金を注入し，その過程でもし注入をうけた企業の株価が正になるようなら，その分は回収するという操作の繰り返しである．逐次救済アルゴリズムが最適解を与えることの証明は Ishii, Shi and Suzuki (2014) によって示されている．4 節では，資本配分を実施する際に，とくに政策当事者にとって有用な各種指標を提案し，また，その計算方法を述べる．各種指標は，モンテカルロ・シミュレーションを用いた計算によって一度に全てが得られるようにデザインした．

銀行救済における公的資金の
最適配分問題とその経済効果

鈴木輝好*

概要

本論文では，Ishii, Shi and Suzuki (2014) により提唱された最適資本配分問題における，資本配分の経済効果について議論する．ここで，最適資本配分問題とは，政府が，事前に決められた予算の下で破綻状態にある金融機関あるいは企業に資本注入を行い，経済全体のクレジットロスを最小化させる問題のことである．そして，その経済効果とは，事前に決められた予算が，将来どの程度のクレジットロスを防ぐのか，またどの程度の企業を救うのか等に関する期待値のことである．

1　はじめに

過去，複数の金融機関もしくは金融システム全体が破綻の危機にあった際，行政府は公的資金を用いて，ある特定の金融機関を救済してきた．その判断根拠は「大きすぎて潰せない」を様々に言い換えているだけであり，根拠に乏しい．これに対して，Ishii, Shi and Suzuki (2014) は，銀行救済における公的資金の最適配分額を定量的に決定するモデルを提唱した．政府はどの企業を救済すべきかを，予算の大きさと同時に決定できることが特徴である．以下では，Ishii, Shi and Suzuki (2014) を紹介し，その後で経済効果の測定方法を提案する．すなわち，第 2 章では，先行研究に従い金融ネットワークを定義し，得られている諸定理を示す．第 3 章では，Ishii, Shi and Suzuki (2014) の結果を証明を省き紹介する．そして第 4 章では，資本配分の経済効果に関する指標とその計測方法を示す．第 5 章では，今後の課題について述べる．

* 北海道大学経済学研究科．E-mail: `suzuki@econ.hokudai.ac.jp`. 本研究の一部を Bachelier Colloquium 2014, France（招待講演），および Stochastic Calculus, Martingales and Financial Modeling, Saint Petersburg, Russia, June, 29- July, 6, 2014（招待講演），さらに，20th Conference of the International Federation of Operations Research Society, Barcelona, Spain, July 13-18 2014 において発表した．

2　金融ネットワークの定義と先行研究の結果

2.1　設定

Eisenberg and Noe (2001) に従い金融ネットワークを構成する．経済には，外部投資家を除く企業が n 社存在するとする．企業 i が発行する債券の額面を b_i とし，以下のベクトルを定義する．

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix}^\top.$$

また，π_{ij}^k を企業 i が j に対して持つ証券の保有割合とする．ただし，$k=0$ は株式を表し，$k=1$ は債券を表す．外部投資家の存在を仮定する場合，$\mathbf{\Pi}^k = (\pi_{ij}^k)_{i,j=1}^n$ は劣確率行列 $(\sum_i \pi_{ij}^k < 1)$ である．但し，自社証券を保有することは認めず $\pi_{ii}^k = 0$ とする．証券保有の構造を表す行列として

$$\mathbf{\Pi}_k = \begin{pmatrix} \pi_{11}^k & \dots & \pi_{1n}^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{n1}^k & \dots & \pi_{nn}^k \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1$$

を定義する．また，債券の満期は共通であると想定し，満期における企業 i の事業資産の価値を e_i と表す．事業資産の価値 e_i は資本構成とは独立に与えられ，

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix}^\top \in \boldsymbol{R}_+^n$$

とする．

さらに，満期における株式と債券の利得 (証券ペイオフ) を p_i^k とする $(k = 0, 1)$．ベクトルとして，

$$\mathbf{p}^k = \begin{pmatrix} p_1^k & \dots & p_n^k \end{pmatrix}^\top \in \boldsymbol{R}_+^n, \quad k = 0, 1.$$

を定義し，また，利得ベクトルを

$$\mathbf{p} = (\mathbf{p}^0 \ \mathbf{p}^1)^\top \in \boldsymbol{R}_+^{2n}$$

とする．

いま，満期における企業 i の総資産価値を a_i で表すと，a_i は証券ペイオフの関数として以下のように与えられる．

$$a_i(\mathbf{p}) = e_i + \sum_{\ell=0}^{1} \sum_{j=1}^{n} \pi_{ij}^\ell p_j^\ell.$$

従って，企業 i が倒産状態にあるかどうかは次のように定義される．

$$\text{企業 } i \text{ が倒産} \Leftrightarrow a_i(\mathbf{p}) < b_i.$$

また事業資産のベクトルを

$$\mathbf{a}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} a_1(\mathbf{p}) & \dots & a_n(\mathbf{p}) \end{pmatrix}^\top \in \boldsymbol{R}_+^n$$

とすると，

$$\mathbf{a}(\mathbf{p}) = \mathbf{e} + \sum_{\ell=0}^{1} \mathbf{\Pi}_\ell \mathbf{p}^\ell$$

と表現できる．

ここで，倒産がない場合には，全ての負債が額面通り支払われ，残余額は株式の利得になるとする．このとき株式と債券の利得は

$$\begin{aligned} p_i^0 &= \max(a_i(\mathbf{p}) - b_i, 0) = (a_i(\mathbf{p}) - b_i)_+ \\ p_i^1 &= \min(a_i(\mathbf{p}), b_i) \end{aligned}$$

で与えられる．

利得ベクトルは次の条件を満たすときに，清算利得ベクトル (clearing payment vector) と呼ばれる．

定義 1（Eisenberg and Noe; 2001） 利得ベクトル $\mathbf{p}$ が清算利得ベクトルであるとき，次を満たす．

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^0 &= (\mathbf{a}(\mathbf{p}) - \mathbf{b})_+ \\ \mathbf{p}^1 &= \mathbf{D}(\mathbf{p})\mathbf{a}(\mathbf{p}) + (\mathbf{I} - \mathbf{D}(\mathbf{p}))\mathbf{b} \end{aligned}$$

である．ただし

$$\mathbf{D}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 1_{\{a_1(\mathbf{p}) < b_1\}} & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & 1_{\{a_n(\mathbf{p}) < b_n\}} \end{pmatrix}$$

とする．

後のために次のような集合を定義しておく．

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \{i \mid a_i(\mathbf{p}) < b_i\}, \\ \mathcal{B} &= \{i \mid a_i(\mathbf{p}) = b_i\}, \\ \mathcal{S} &= \{i \mid a_i(\mathbf{p}) > b_i\}. \end{aligned}$$

集合 $\mathcal{D}$ はデフォルトしている企業の集合で，集合 $\mathcal{S}$ は生存している企業の集合である．また，集合 $\mathcal{B}$ は，デフォルトと生存の境界上にある企業の集合である．さらに，生存状態，および境界上にある状態を表す行列として以下を定義しておく．

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 1_{\{a_1(\mathbf{p})>b_1\}} & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & 1_{\{a_n(\mathbf{p})>b_n\}} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 1_{\{a_1(\mathbf{p})=b_1\}} & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & 1_{\{a_n(\mathbf{p})=b_n\}} \end{pmatrix}.$$

2.2　清算利得ベクトルに関する諸定理

ここでは清算利得ベクトルの存在性と決定方法に関する先行研究，および双対問題に関する結果を示す.

まず，関数

$$\mathbf{f} = (\mathbf{f}^0\ \mathbf{f}^1)^\top : \boldsymbol{R}_+^{2n} \to \boldsymbol{R}_+^{2n}$$

を次の式で定義する．

$$\mathbf{f}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \mathbf{f}^0(\mathbf{p}) \\ \mathbf{f}^1(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{a}(\mathbf{p}) - \mathbf{b})_+ \\ (\mathbf{I} - \mathbf{D}(\mathbf{p}))\mathbf{b} + \mathbf{D}(\mathbf{p})(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Delta})\mathbf{a}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

清算利得ベクトルは不動点問題 $\mathbf{f}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$ の解で与えられ，$\mathbf{f}$ は縮小写像であることがわかっている．

命題 1（Suzuki, 2002）　$\mathbf{1}^\top\boldsymbol{\Pi}_0 < \mathbf{1}$ および $\mathbf{1}^\top\boldsymbol{\Pi}_1 < \mathbf{1}$ を仮定するとき，関数 $\mathbf{f}$ は縮小写像となる．すなわち，$\mathbf{f}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$ を満たす $\mathbf{p} \in \boldsymbol{R}_+^{2n}$ が一意に存在する．

$\mathbf{f}$ は縮小写像なので，任意の点 $\mathbf{p}$ を初期値として，逐次的に $\mathbf{f}$ に代入すれば，清算利得を得ることができる．また，次に示すように，初期値を適当に定めることにより，関数 $\mathbf{f}$ は単調増大および単調減少になる．

命題 2（Elsinger, 2009）　$\mathbf{1}^\top\boldsymbol{\Pi}_0 < \mathbf{1}$ を仮定する．$\overline{\mathbf{p}}_0^0 \in \boldsymbol{R}_+^n$ を以下で定義する．

$$\overline{\mathbf{p}}_0^0 = (\mathbf{I} - \boldsymbol{\Pi}_0)^{-1}\left(\mathbf{e} + \boldsymbol{\Pi}_1\mathbf{b}^1 - \mathbf{b}\right)_+.$$

このとき $2n$ 次元ベクトル $\{\overline{\mathbf{p}}_h\}$ に関する関数列

$$\overline{\mathbf{p}}_0 = (\overline{\mathbf{p}}_0^0\ \mathbf{b}^1)^\top,\quad \overline{\mathbf{p}}_h = \mathbf{f}(\overline{\mathbf{p}}_{h-1}),\quad h \geq 1$$

は収束して，$\mathbf{f}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$ を満たす．また，$\{\overline{\mathbf{p}}_h\}$ は単調減少列となる．

命題 3（Elsinger, 2009）　$\mathbf{1}^\top \mathbf{\Pi}_0 < \mathbf{1}$ を仮定する．$\underline{\mathbf{p}}_0^0 \in \boldsymbol{R}_+^n$ を以下で定義する．$\underline{\mathbf{p}}_0^0 = \underline{\mathbf{p}}_0^1 = 0$ とする．このとき $2n$ 次元ベクトル $\{\underline{\mathbf{p}}_h\}$ に関する関数列

$$\underline{\mathbf{p}}_0 = (\underline{\mathbf{p}}_0^0 \ \underline{\mathbf{p}}_0^1)^\top, \quad \underline{\mathbf{p}}_h = \mathbf{f}(\underline{\mathbf{p}}_{h-1}), \quad h \geq 1$$

は収束して，$\mathbf{f}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$ を満たす．また，$\{\overline{\mathbf{p}}_h\}$ は単調増大列となる．

清算利得ベクトルは

仮定 1　$\mathbf{1}^\top \mathbf{\Pi}^1 < \mathbf{1}^\top, \quad \mathbf{\Pi}^0 = \mathbf{O}$

の下では，線形計画問題の解として与えることができる．

命題 4（Eisenberg and Noe, 2001）　仮定 1 の下で，線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{\mathbf{p}^1} & \mathbf{c}^\top \mathbf{p}^1 \\ \text{s.t.} & \mathbf{p}^1 - \mathbf{\Pi}_1 \mathbf{p}^1 \leq \mathbf{e} \\ & \mathbf{0} \leq \mathbf{p}^1 \leq \mathbf{b} \end{array} \tag{1}$$

の最適解は清算利得ベクトルとなる．ただし $\mathbf{c} \in \mathbf{R}_+^n$ を任意のベクトルとする．

この問題は基底形式を用いると次のように表現できる．ただし，スラック変数として株式価値 $\mathbf{p}^0$ および資本不足 $\mathbf{v} \in \mathbf{R}_+^n$ を用いる．

$$\begin{array}{lll} \max\limits_{\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^0, \mathbf{v}} & \mathbf{c}^\top \mathbf{p}^1 & \\ \text{s.t.} & \mathbf{p}^1 - \mathbf{\Pi}_1 \mathbf{p}^1 + \mathbf{p}^0 & = \mathbf{e} \\ & \mathbf{p}^1 + \mathbf{v} & = \mathbf{b} \\ & \mathbf{p}^1, \mathbf{p}^0, \mathbf{v} \geq 0 & \end{array} \tag{2}$$

清算利得と線形計画問題との関係を付録に解説した．

Liu and Staum (2010) は $\mathbf{e}$ に関する右辺感応度を示した．Ishii, Shi and Suzuki (2014) は $\mathbf{b}$ についても結果を示し，より簡便な証明を与えた．

命題 5

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^{+}\mathbf{p}^{1}}{\partial\mathbf{e}} &= \left(\mathbf{1}-\mathbf{D}(\mathbf{p})\mathbf{\Pi}_{1}\right)^{-1}\mathbf{D}(\mathbf{p})\\
\frac{\partial^{-}\mathbf{p}^{1}}{\partial\mathbf{e}} &= \left(\mathbf{1}-\left(\mathbf{D}(\mathbf{p})+\mathbf{B}(\mathbf{p})\right)\mathbf{\Pi}_{1}\right)^{-1}\left(\mathbf{D}(\mathbf{p})+\mathbf{B}(\mathbf{p})\right)\\
\frac{\partial^{+}\mathbf{p}^{1}}{\partial\mathbf{b}} &= \left(\mathbf{1}-\left(\mathbf{D}(\mathbf{p})+\mathbf{B}(\mathbf{p})\right)\mathbf{\Pi}_{1}\right)^{-1}\mathbf{S}(\mathbf{p})\\
\frac{\partial^{-}\mathbf{p}^{1}}{\partial\mathbf{b}} &= \left(\mathbf{1}-\mathbf{D}(\mathbf{p})\mathbf{\Pi}_{1}\right)^{-1}\left(\mathbf{S}(\mathbf{p})+\mathbf{B}(\mathbf{p})\right)
\end{aligned}
$$

債券価格の感応度が得られたので，線形計画問題 (1) の目的関数値 $f=\mathbf{c}^{\top}\mathbf{p}$ について，次の結果が直ちに得られる．

命題 6（右辺感応度）

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^{+}f}{\partial\mathbf{e}} &= \mathbf{D}(\mathbf{p})\left(\mathbf{1}-\mathbf{\Pi}_{1}^{\top}\mathbf{D}(\mathbf{p})\right)^{-1}\mathbf{c},\\
\frac{\partial^{-}f}{\partial\mathbf{e}} &= \left(\mathbf{D}(\mathbf{p})+\mathbf{B}(\mathbf{p})\right)\left(\mathbf{1}-\mathbf{\Pi}_{1}^{\top}\left\{\mathbf{D}(\mathbf{p})+\mathbf{B}(\mathbf{p})\right\}\right)^{-1}\mathbf{c},\\
\frac{\partial^{+}f}{\partial\mathbf{b}} &= \mathbf{S}(\mathbf{p})\left(\mathbf{1}-\mathbf{\Pi}_{1}^{\top}\left\{\mathbf{D}(\mathbf{p})+\mathbf{B}(\mathbf{p})\right\}\right)^{-1}\mathbf{c},\\
\frac{\partial^{-}f}{\partial\mathbf{b}} &= \left(\mathbf{S}(\mathbf{p})+\mathbf{B}(\mathbf{p})\right)\left(\mathbf{1}-\mathbf{\Pi}_{1}^{\top}\mathbf{D}(\mathbf{p})\right)^{-1}\mathbf{c}
\end{aligned}
$$

次に，右辺感応度と双対問題の関係を示す．

命題 7（Ishii, Shi and Suzuki; 2014） 問題 (1) の双対問題は

$$
\begin{array}{lll}
\displaystyle\min_{\mathbf{y}^{1},\mathbf{z},w} & \mathbf{e}^{\top}\mathbf{y}+\mathbf{b}^{\top}\mathbf{z} & \\
\text{s.t.} & (\mathbf{I}-\mathbf{\Pi}_{1}^{\top})\mathbf{y}+\mathbf{z} & \geq \mathbf{c}\\
 & \mathbf{y}>\mathbf{0},\mathbf{z}>\mathbf{0} &
\end{array}
\tag{3}
$$

により与えられる．ただし $\mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_n)^{\top}$,$\mathbf{z}=(z_1,\ldots,z_n)^{\top}$．このとき，

$$
\mathbf{y}=\frac{\partial^{+}f}{\partial\mathbf{e}},\quad \mathbf{z}=\frac{\partial^{-}f}{\partial\mathbf{b}}
$$

は最適解である．同様に，

$$
\mathbf{y}=\frac{\partial^{-}f}{\partial\mathbf{e}},\quad \mathbf{z}=\frac{\partial^{+}f}{\partial\mathbf{b}}
$$

も最適解である．

主問題の解が得られている場合，線形相補性から双対問題の解を得ることができる．

定理 1（Ishii, Shi and Suzuki; 2014）　主問題の解と双対問題の解に関して，

$$\mathbf{y} = \frac{\partial^+ f}{\partial \mathbf{e}}, \quad \mathbf{z} = \frac{\partial^- f}{\partial \mathbf{b}},$$

$$\mathbf{p}^1 = (\mathbf{I} - \mathbf{D}(\mathbf{p})\mathbf{\Pi}_1)^{-1}\Big(\mathbf{D}(\mathbf{p})\mathbf{e} + (\mathbf{S}(\mathbf{p}) + \mathbf{B}(\mathbf{p}))\,\mathbf{b}\Big),$$

および

$$\mathbf{y} = \frac{\partial^- f}{\partial \mathbf{e}}, \quad \mathbf{z} = \frac{\partial^+ f}{\partial \mathbf{b}},$$

$$\mathbf{p}^1 = (\mathbf{I} - (\mathbf{D}(\mathbf{p}) + \mathbf{B}(\mathbf{p}))\,\mathbf{\Pi}_1)^{-1}\Big((\mathbf{D}(\mathbf{p}) + \mathbf{B}(\mathbf{p}))\,\mathbf{e} + \mathbf{S}(\mathbf{p})\mathbf{b}\Big),$$

はどちらも線形相補性

$$(\mathbf{p}^1)^\top\Big((\mathbf{I} - \mathbf{\Pi}_1^\top)\mathbf{y} + \mathbf{z} - \mathbf{c}\Big) = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{y}^\top(\mathbf{p}^1 - \mathbf{\Pi}_1\mathbf{p}^1 - \mathbf{e}) + \mathbf{z}^\top(\mathbf{p}^1 - \mathbf{b}) = \mathbf{0}$$

を満たす．

3　資本配分問題

政府による資本配分問題は次のように定式化できる．予算総額を M，企業 i に対する資本注入額を x_i とする．また目的は，クレジットロスの最小化，すなわち負債の精算利得総額の最大化である．ここで $\mathbf{c} \in \mathbf{R}_+^n$ は任意の重みとする．

$$\begin{array}{lll} \max\limits_{\mathbf{p}^1,\mathbf{x}} & \mathbf{c}^\top\mathbf{p}^1 & \\ \text{s.t.} & \mathbf{p}^1 - \mathbf{\Pi}_1\mathbf{p}^1 - \mathbf{x} & \leq \mathbf{e}, \\ & \mathbf{p}^1 & \leq \mathbf{b}, \\ & \mathbf{1}^\top\mathbf{x} & \leq M, \\ & \mathbf{x}, \mathbf{p}^1 & \geq \mathbf{0}. \end{array} \tag{4}$$

問題 (4) の特徴を整理する．まず，問題 (4) は次のような基底形式で表現できる．

$$\begin{array}{lll} \max\limits_{\mathbf{p}^1,\mathbf{p}^0,\mathbf{v},\mathbf{x}} & \mathbf{c}^\top\mathbf{p}^1 & \\ \text{s.t.} & \mathbf{p}^1 - \mathbf{\Pi}_1\mathbf{p}^1 - \mathbf{x} + \mathbf{p}^0 & = \mathbf{e} \\ & \mathbf{p}^1 + \mathbf{v} & = \mathbf{b} \\ & \mathbf{1}^\top\mathbf{x} + m & = M \\ & \mathbf{p}^1, \mathbf{p}^0, \mathbf{v}, \mathbf{x}, m \geq 0 & \end{array} \tag{5}$$

ここで，スラック変数は，株式価値 $\mathbf{p}^0$ と資本不足 $\mathbf{v}$，さらに未配分予算 $m \in R_+$ である．

次に，問題 (4) の双対問題を示す．

$$
\begin{array}{lll}
\min\limits_{\mathbf{y}^1,\mathbf{z},w} & \mathbf{e}^\top \mathbf{y} + \mathbf{b}^\top \mathbf{z} + Mw & \\
\text{s.t.} & (\mathbf{I} - \mathbf{\Pi}_1^\top)\mathbf{y} + \mathbf{z} & \geq \mathbf{c} \\
 & -\mathbf{y} + w\mathbf{1} & \geq \mathbf{0} \\
 & \mathbf{y}, \mathbf{z} \geq \mathbf{0}, w \geq 0. &
\end{array} \tag{6}
$$

また，線形相補性は次のようになる．

補題 1（線形相補性）

$$
(\mathbf{p}^1)^\top \Big((\mathbf{I} - \mathbf{\Pi}_1^\top)\mathbf{y} + \mathbf{z} - \mathbf{c} \Big) + \mathbf{x}^\top(-\mathbf{y} + w\mathbf{1}) = \mathbf{0}
$$
$$
\mathbf{y}^\top(\mathbf{p}^1 - \mathbf{\Pi}_1 \mathbf{p}^1 - \mathbf{x} - \mathbf{e}) + \mathbf{z}^\top(\mathbf{p}^1 - \mathbf{b}) + w(\mathbf{1}^\top \mathbf{x} - M) = \mathbf{0}.
$$

資本配分問題 (4) の解はシンプレックス法で求めることができる．しかし，シンプレックス法では，優先順位は得られない．Ishii, Shi and Suzuki (2014) は，最適解とともに資本注入の優先順位を与える逐次救済アルゴリズムを提案した．

定理 2（Ishii, Shi and Suzuki; 2014）

(1) $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ として，$\mathbf{p}^1$ および $\mathbf{D}(\mathbf{p})$ を決定する．

(2) 資本注入に対して，瞬間的に効率が高い企業 k を選択する．

$$
k = \mathrm{argmax}_i \frac{\partial^+ f}{\partial e_i}, i \in \mathcal{N}.
$$

その企業に対して，額 $x_k = \min(v_k, m)$ を資本注入する．ここで，$\mathcal{N} = \Omega - \mathcal{I}, \mathcal{I} = \{i | x_i > 0, i \in \mathcal{B}\}$ とする．

(3) $\mathbf{x}$ を更新して，$\mathbf{p}^1$ および $\mathbf{D}(\mathbf{p})$ を更新する．

(4) $x_i > 0$ となる企業については，株式利得 p_i^0 がゼロになるまで資本注入額を減らす．回収資本は未配分予算 m に戻す．

(5) 企業の選択 k が正しかったかを判断する．ただし，

$$
w = \max_{i \in \mathcal{N}} \frac{\partial^+ f}{\partial e_i}
$$

とする．

(5.1) $\frac{\partial^- f}{\partial e_k} \geq w$ ならば，新たに資本注入を行うために，(2) からスタートする．

(5.2) $\frac{\partial^- f}{\partial e_k} < w$ ならば，資本注入企業を選択しなおすために，(2) からやり直す．

(6)　$m=0$ となるか $\mathcal{D}=\phi$ となるまで，(2) から (5) を繰り返す．

注意 1　逐次救済アルゴリズムによる救出企業の優先順位は予算総額 M に依存しない．

これは，シンプレックス法にはない特徴である．このため，すべての企業を救うための、次の問題を一度，解いておけば，救済の優先順位が任意の予算総額について得られる．つまり，事後的に予算総額を決定しても，資本配分は最適である．

$$
(\mathrm{P}_1) \qquad \begin{array}{ll} \max\limits_{\mathbf{p}^1,\mathbf{x}} & \mathbf{c}^\top \mathbf{p^1} \\ \text{s.t.} & \begin{cases} \mathbf{p}^1 \le \mathbf{\Pi}^1\mathbf{p^1} + \mathbf{e} + \mathbf{x} \\ \mathbf{0} \le \mathbf{p^1} \le \mathbf{b^1} \\ \mathbf{1}^\top\mathbf{x} = M_0 \\ \mathbf{x} \ge 0, \end{cases} \end{array}
$$

ただし，M_0 は問題 (2) における資本不足の総額を用いて

$$
M_0 = \mathbf{1}^\top(\mathbf{b} - \mathbf{p}^1)
$$

とする．

4　資本配分の経済効果

事前に決められたリスクホライズン T において，資本注入を行うと仮定する．事業価値は，確率測度 P の下である確率過程に従うとする．以下では，モンテカルロ・シミュレーションを用いる．また，十分に大きな予算として $\bar{M}$ を用意し，$\bar{M}$ を等分割した項を持つベクトル

$$
\mathbf{M} = (0, \Delta M, 2\Delta M, ..., \bar{M}),
$$

を定義しておく．無リスク金利を r とする．

予算の期待経済効果

資本配分問題 (4) の目的関数値を $g(\mathbf{x}, M)$ とする．このとき予算 M の時刻 T における経済効果を

$$
g(\mathbf{x}, M) - g(\mathbf{x}, 0)
$$

とすると，その期待現在価値は

$$
\phi_1(M) = \exp(-rT)E^P\left[g(\mathbf{x}, M) - g(\mathbf{x}, 0)\right]
$$

により計算できる．いま，$\phi_1(\bar{M})$ をモンテカルロ・シミュレーションにより求めれば，逐次救済アルゴリズムの性質から，

$$\phi_1(\mathbf{M}) = (\phi_1(0), \phi_1(\Delta M), \phi_1(2\Delta M), \ldots, \phi_1(\bar{M}))$$

を得ることができる．予算額を変化させてシミュレーションをやり直す必要は無い．

期待救済企業数

実現した事業価値 $\mathbf{e}$ に対し，予算 M を用いて資本注入を実施した結果，得られる精算利得ベクトルを

$$\mathbf{p}(\mathbf{e}, M)$$

とする．逐次救済アルゴリズムでは，救済された企業は $i \in \mathcal{B}$ となるので，救済された企業数の期待値は，

$$\phi_2(M) = E^P\left[\mathbf{1}^\top \mathbf{B}(\mathbf{p}(\mathbf{e}, M))\mathbf{1} - \mathbf{1}^\top \mathbf{B}(\mathbf{p}(\mathbf{e}, 0))\mathbf{1}\right]$$

により計算できる．ここでも十分に大きな予算 $\bar{M}$ に対して，一度モンテカルロ・シミュレーションを行えば

$$\phi_2(\mathbf{M}) = (\phi_2(0), \phi_2(\Delta M), \phi_2(2\Delta M), \ldots, \phi_2(\bar{M}))$$

を得ることができる．また，ϕ_2 は ϕ_1 と同時に計算できる．

VaR の低減効果

債券ポートフォリオ $\mathbf{c}^\top\mathbf{p}$ について，予算 M を用いて資本注入を行う場合の Value at Risk を $h(\mathbf{c}, \mathbf{p}, M)$ とする．ここで資本注入による VaR の低減効果を

$$\phi_3(M) = h(\mathbf{c}, \mathbf{p}, M) - h(\mathbf{c}, \mathbf{p}, 0)$$

により定義する．これまでと同様に予算 $\bar{M}$ に対してモンテカルロ・シミュレーションを行えば，

$$\phi_3(\mathbf{M}) = (\phi_3(0), \phi_3(\Delta M), \phi_3(2\Delta M), \ldots, \phi_3(\bar{M}))$$

を得ることができる．また，ϕ_3 は ϕ_1, ϕ_2 とも同時に計算できる．

目標 VaR に必要な予算

政府が目標とする VaR 値を V^* とする．この目標に必要な予算を求めることが可能である．いま

$$h(M) = h(\mathbf{c}, \mathbf{p}, M)$$

とすると，

$$M^* = h^{-1}(V^*)$$

を求めれば良い．M^* も ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 と同時に計算できる．M^* は経済ネットワークの連結度や事業資産の初期値により変動し，ある種の経済指標になる．

5　今後の課題

企業がデフォルトする際には, 直接的にも間接的にもコストが発生するのが通常である．また，資本配分は動的問題とするのが現実的である．これら 2 点を今後の課題とする．

付録 A　清算利得と線形計画問題との関係

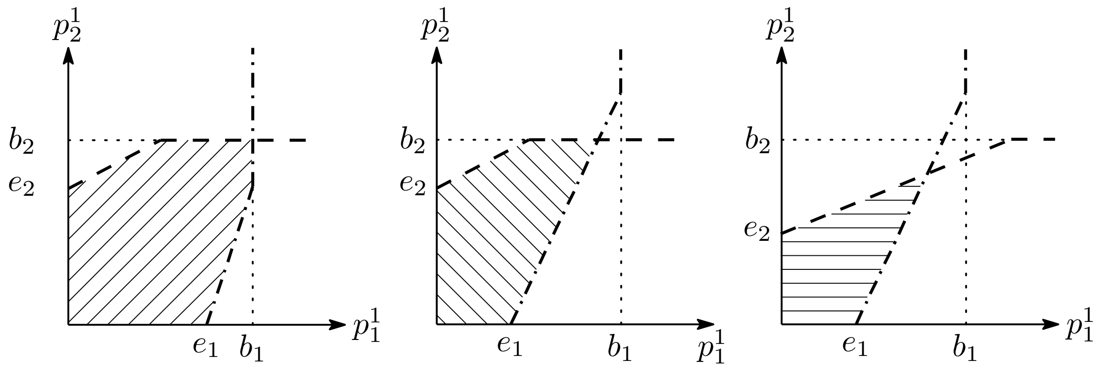
線形計画問題 (1) の解が，清算利得となることを図を用いて解説する．$n = 2$ とする．このとき，(1) は次のようになる．

$$\begin{aligned}
\max_{p_1^1, p_2^1} \quad & c_1 p_1^1 + c_2 p_2^1 && (7)\\
\text{s.t.} \quad & p_1^1 \le \pi_{12} p_2^1 + e_1, && (8)\\
& p_1^1 \le b_1 && (9)\\
& p_2^1 \le \pi_{21} p_1^1 + e_2, && (10)\\
& p_2^1 \le b_2 && (11)\\
& p_1^1 > 0, p_2^1 > 0 && (12)
\end{aligned}$$

図 1 は左から，2 社ともに生存する場合，企業 1 がデフォルトする場合，2 社ともにデフォルトする場合を表す．実行可能領域は斜線で示されており，破線は式 (8), (9)，一点破線は式 (10), (11) を表す.

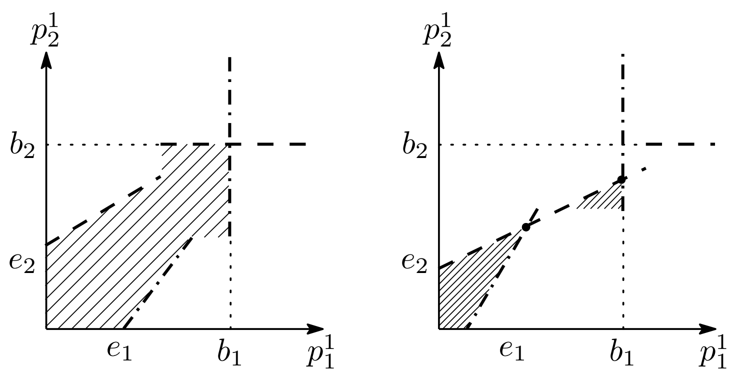
一方，定義 1 に基づく清算利得ベクトルは破線および一点破線の交点として与えられる．いま，図 1 を見ると，交点はいずれの場合も右上方向に鋭角を作っており，目的関数はこの点で最大化されることがわかる.

図 1　線形計画法による清算利得ベクトルの計算



Rogers and Veraart (2013) は Eisenberg and Noe (2001) をデフォルトコストのある問題に拡張した．このときは，清算利得ベクトルは例えば図 2 のように与えられる．左側は，2 社ともに生存する場合で，交点は 1 点で与えられる．しかし，実行可能領域は凸ではない．また，右側は，企業 2 がデフォルトする場合を表し，交点が 2 つ存在している．これは清算利得ベクトルが必ずしも一意ではないことを表す.

図 2　デフォルトコストのある問題における清算利得ベクトル

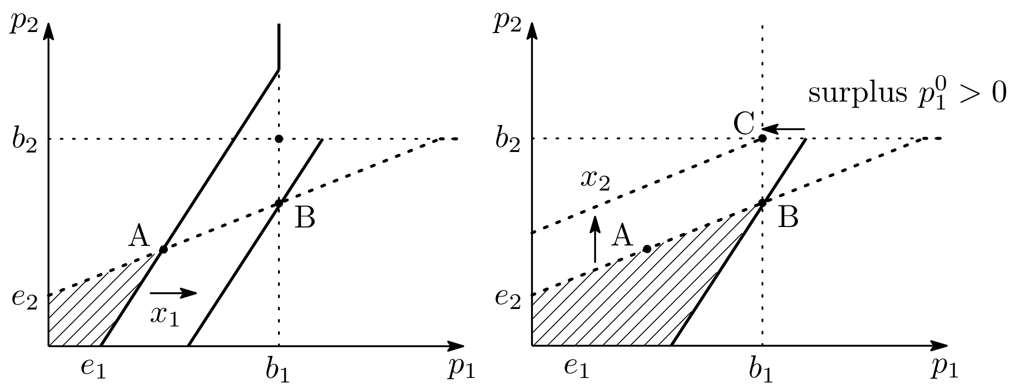


付録 B　逐次救済アルゴリズム（補足）

B.1　資本回収の必要性

図 3 はデフォルトしている 2 社に対して資本注入する場合を描いている．清算利得ベクトルは点 A で与えられている．まず，左側の図では，企業 1 に対して資本 x_1 を注入した．これにより，清算利得ベクトルは点 B に移動した．ただし，企業 1 の株価はゼロである．次に企業 2 に対して資本注入を行う．額 x_2 により，清算価格ベクトルは点 C に移動する．このとき，企業 1 が企業 2 の債券を保有していることから，企業 1 の株価は上昇して正の値となった．つまり，事前に注入した x_1 は過大であったことになる．よって，額 p_1^0 を回収して予算に戻す．このとき清算価格ベクトルは点 C のままである．

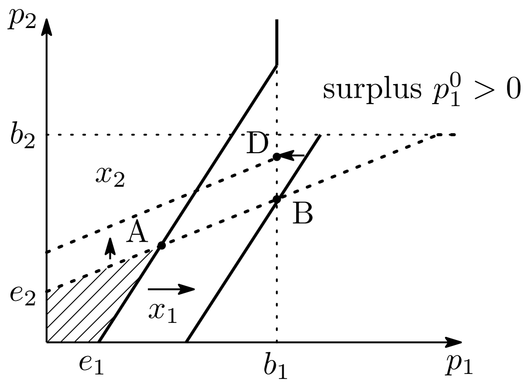
図 3　資本注入と資本回収



B.2　アルゴリズムの収束について

図 4 では，図 3 と同じ初期状態から，資本注入を行う．ただし，企業 2 を完全に救済するだけの予算が無い場合を扱う．まず，図 3 と同様に企業 1 に額 x_1 を注入する．続いて，企業 2 に資本注入を行うが，清算利得ベクトルは点 D までしか，移動できない場合を考える．つまり，企業 2 は引き続き資本不足である．ただし，企業 1 は企業 2 の債券価格の上昇により，株価がゼロから正に変化している．つまり，x_1 の注入は過剰であった．そこで，資本 p_1^0 を回収して，予算に戻す．すると，企業 2 へ注入する予算ができるので，再度，企業 2 へ注入を行う．このとき，再び企業 1 の株価は正になる．同様の注入と回収を，企業 1 の株価がある微小な値になるまで繰り返す．これが，逐次救済アルゴリズムの

図 4　2 社を救済するだけの予算が無い場合



最終状態である.

参考文献

DeMarzo, P. M. (1988), "An Extension of the Modigliani-Millar Theorem to Stochastic Economies with Incomplete Markets and Interdependent Securities," *Journal of Economic Theory*, **45**(2), 353–369.

Docking, D. S., M. Hirschery, and E. Jones (1997), "Information and Contagion Effects of Bank Loan-Loss Reserve Announcements," *Journal of Finaical Economics*, **43**(2), 219–239.

Eisenberg, L. and T. H. Noe (2001), "Systemic Risk in Financial Systems," *Management Science*, **47**(2), 236–249.

Elsinger, H. (2009), "Financial Networks, Cross Holdings, and Limited Liability," working paper.

Fischer, T. (2012), "No-Arbitrage Pricing under Systemic Risk: Accounting for Cross-Ownership," forthcoming in *Mathematical Finance.*

Karl, S. and T. Fischer (2013), "Cross-Ownership as a Structural Explanation for Over- and Underestimation of Default Probability," working paper.

Ishii, T., Shi, J. and Suzuki, T. (2014), "Optimal Capital Injection Problem under Financial Ciris," working paper.

Merton, R. C. (1974), "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates," *Journal of Finance*, **29**(2), 449–470.

Musumeci, J. J. and J. F. Sinkey (1990), "Journal of Money, Credit, and Banking," *The Internatioal Debt Crisis and Bank Loan-Loss-Reserve Decisions: The Signaling Content of Partially Anticipated Events*, **22**(3), 370–387.

Rogers, L. C. G. and L. A. M. Veraart (2013), "Failure and Rescue in an Interbank Network," *Management Science*, **59**(4), 882–898.

Shin, H. S. (2008), "Risk and Liquidity in a System Context," *Journal of Financial Intermediation*, **17**(3), 315–329.

Shin, H. S. (2009), "Securitisation and Financial Stability," *Economic Journal*, **119**(536), 309–332.

Suzuki, T. (2002), "Valuing Corporate Debt: The Effect of Cross-Holdings of Stock and Debt," *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **45**(2), 123–144.

Wall, L. D. and T. W. Koch (2000), "Bank Loan-Loss Accounting: A Review of Theoretical and Empirical Evidence," *Economic Review*, **85**(2), 1–19.