

どうすれば景気に左右されずに資産を運用できるのか

吉川大介
北海学園大学 経営学部*

July 27, 2017

Abstract

本研究は安定的な投資手法、とくにペアトレーディングに焦点をあて、最適な取引開始（あるいは終了）時点を導出するものである。この最適な取引開始（終了）時点を求めるにあたって、モデル・パラメータの推定に誤りがあることも勘案し、可能な限り頑健な投資戦略の構築を行った。その際、相対エントロピーをペナルティ関数として用い、明示的に最適な戦略の導出に成功した。

1 はじめに

本研究はモデル・リスクを勘案したマーケット中立的な投資手法の構築を目指すものである。マーケット中立的な投資手法のうち特に有名なものはモルガン・スタンレーのNunzio Tartagliaのトレーディング・グループによって開発されたペアー・トレーディングである。これは共和分関係がみられる二つの銘柄を組み合わせたペアーの価値が平均回帰性を示すことを利用し、例えばペアーの価値が回帰水準をもっとも離れたときにポジションを組み、平均回帰水準に回帰したときを狙ってポジションを解消する、あるいは逆に回帰水準にタッチしたときにポジションを組み、回帰水準からもっとも離れたときにポジションを解消する、といったものである。

Tartagliaのグループはこのペアー・トレーディングにより大きな成功を収めた。実際、1987年には約5000万ドルの収益を上げたともいわれている。しかし、この手法の重要性は高収益性ではなく安定的な収益性にある。それ

*本研究の成果は”An entropic approach for pair trading”としてEntropy 2017, 19(7)に掲載された。ここに記して感謝の意を表したい。

ゆえ、この手法はマーケット中立的な投資手法の中でも最も人気の高い手法の一つと考えられている。

このペアー・トレーディングはTartaglia以降、実務的に盛んに活用されただけでなく学術的にも大きく発展した。例えば、Elliott et al. (2005)はこの文脈におけるもっともよく引用された成果である。また、ペアー・トレーディングに関する包括的なレビューとして用いられるGatev et al. (2006)なども大きな研究成果の一つである。また、もともとのペアー・トレーディングはその名の通り一組の銘柄の組み合わせを用いるものだが、より柔軟に2つ以上の銘柄を組み合わせた統計的裁定と呼ばれる技術への拡張もあった (Avellaneda and Lee (2010); Kakushadze (2015)などを参照)。また、もともとは株式の組み合わせとして開発されたペアー・トレーディングだが、近年ではその他の証券にも応用されている。たとえば、Caporale et al. (2017)などは外国為替市場へもペアー・トレーディングの応用可能性があることを示している。

さてペアー・トレーディングは非常にシンプルな手法に見えるが、その実行にあたっては二つの問題がある。一つはペアーの価値が収束する平均回帰水準をどのように求めるのか、という問題である。今一つは、どのようにしてペアー・トレーディングの開始あるいは終了時点を求めるのか、という問題である。

最初の問題はモデル・リスクあるいはモデルの不確実性と言われる問題と関連がある。というのも、モデルの仮定に誤りがあったりモデル・パラメータの推定に誤りがあると、正しく平均回帰水準を求められないからだ。

二つ目の問題については、最適な取引開始（あるいは終了）時点を最適停止問題の枠組みでとらえることで克服しようとする試みがしばしば行われてきた¹。実際、最適停止問題のフレームワークは、ペアーの価値がある閾値に達した時ポジションをロングあるいはショートするのが最適となるような、そのような閾値を我々に示してくれる。しかし、この第二の問題は第一の問題と強く関連している。なぜなら、最適停止問題は第一の問題で言及された平均回帰水準を含むモデル・パラメータに基づいて考察されるものであり、もしモデル・パラメータに推定誤差があったら最適停止問題も誤りを含んだものになってしまうからだ。

こうした問題を克服するため、たとえば、Ekström et al. (2011)は投資家がこのような推定モデルの誤りに備えてあらかじめロスカット・ラインを設定すべきであり、最適停止問題を解く場合もロスカット・ラインを組み込んで取り組むべきだと主張している。

たしかにロスカット・ラインを設定することは実務的にもよく用いられる自然な方法ではあるし直感に訴える方法でもある。しかし、本研究においてはより直接的にモデルの誤推定に備える問題に取り組みたい。そのほうが

¹最適停止問題はいわば数学的なアプローチといってよいが、統計的なアプローチでこの問題に取り組む試みもある。例えば、Chen and Lin (2017); Chen et al. (2017)は統計的アプローチで最適な取引開始（終了）時点を導出している。

より頑健な取引手法の提案につながると考えるからである。²すなわち、本研究はモデルの誤差推定を考慮にいたした最適停止問題を解くことで頑健なペアー・トレーディング手法を提案するものである。

このような試みへのアプローチとしては二つ考えられる。一つはファジィ・ロジックを導入する、というものである。これはファジィ集合の概念をもとに考えられたものであるが、その顕著な特徴として挙げられるのは、部分メンバーシップと呼ばれる概念である。この概念は不確実性や不正確さを含む境界があいまいな要素の識別を可能にするものである。それゆえ、ファジィ・ロジックの導入により、最適戦略はより精緻なフラグを我々に示してくれる可能性がある。たとえば、ペアーが閾値に達した時に単に「買い」とか「売り」といった指示を返すのではなく、「強い買い（売り）推奨」、「買い（売り）推奨」、「弱い買い（売り）推奨」あるいは「ニュートラル」といったフラグを返してくれるかもしれない（ファジィ集合についてのより詳細は Zadeh (1965) を、またファジィ・ロジックのファイナンスへの応用については Sergueeva and Hunter (2004); Zhou and Dong (2004); Gradojevic and Gencay (2013) を参照されたい）。

誤推定への対応として今一つの候補としてはエントロピーを誤推定に対するペナルティ関数として導入することが考えられる。本研究では、こちらに焦点をあてる。ここで注意を喚起したいのは、モデルの不確実性の本質は投資戦略を策定するにあたって参照している確率測度について確信を持ってない、という点である。参照確率測度の推定にあたっては例えば最尤法などの統計的手法が用いられることが多いが、統計的推定は「間違っている可能性が低い」推定結果を我々に教えてくれるものであり、必ずしも真の確率分布を示しているとは限らない。そこで、もし真の確率分布を推定できてなかった場合に備えてエントロピーをペナルティ関数として最適停止問題の内部に繰り込んでしまう、というのが本研究で試みる基本的なアイデアだ。

このエントロピーという概念だが、ファイナンスには幅広く応用されている。たとえばリスク管理の手法としてもエントロピーは応用されている。実際、Bowden (2011) はテイル・リスクを測る道具としてエントロピーを提唱している。また、エントロピー・リスク尺度が金融危機のシグナルになりうるともいわれている (Gradojevic and Gencay (2008); Gencay and Gradojevic (2010); Gradojevic and Caric (2017))。その他のエントロピーに関連する尺度としては Yang and Qiu (2005) の提唱する効用エントロピー尺度などもある。さらに、Black-Scholes オプション価格へのエントロピーを利用した応用 (Stutzer (2000)) や確率割引ファクターの推定問題への応用 (Kitamura and Stutzer (2002)) なども知られている。加えて、エントロピーに基づくアプローチは時系列分析にも応用が試みられている。たとえば、Bekiros (2014) はタ

²同様の試みは Riedel (2009); Krättschmer and Schoenmakers (2010); Krättschmer et al. (2015) も取り組んでいる。ただし、彼らの試みはペアー・トレーディングに焦点を当てたものではない。

イム・スケール問題へのアプローチの一つとしてエントロピーの応用可能性を示している。

さて、相対エントロピーをペナルティ関数として導入することは、ペアー・トレーディングによる収益を最大化しつつ、参照確率分布がたとえ誤推定を含んでいても相対エントロピーを最小化することで頑健な投資手法を提示するものである。本研究では、このアプローチにより明示的な投資手法の導出に成功した。ファジィ・ロジックとの違いを強調しておく、次のように言えるだろう。ファジィ・ロジックにもとづきモデルの不確実性に対応する場合は参照する確率分布に基づく閾値自体はそのまま、閾値にペアーの価値が触れたときにより洗練された戦略の指示を出すのに対して、本研究のアプローチは閾値自体を修正することでモデルの不確実性に対応しようとするものである。ここに二つのアプローチの違いがある。

ただし、相対エントロピーを導入することがどうしてモデル・リスクの緩和につながるのかについては今少し補足が必要である。本文においても言及することではあるが、ここで簡単にまとめておこう。

ある投資戦略にたいするペイオフを X としよう。ペアー・トレーディングに限らず投資家が目指すのはこのペイオフの期待値 $\mathbb{E}^P[X]$ を最大化することである。ここで P は統計的に推定された参照確率測度である。モデル・リスクが気になる投資家にとって推定された参照確率測度 P をそのまま用いて投資戦略を構築することは避けたい。そこで、 P の代わりに確率測度 Q を用いる。問題はどのような測度 Q を用いるべきかだが、もし非常に慎重な投資家なら $\mathbb{E}^Q[X]$ を最小にするような Q を選ぶだろう。これはよく知られる Maxmin 期待効用と本質的には同じアプローチである。しかし、このようなアプローチの結果として導出される投資戦略はしばしば悲観的にすぎ、結局「投資をするべきではない」というのが最適な戦略として提案されてしまいがちだ。そこで、次のような定式化を考える。

$$\inf_{Q \in \mathcal{Q}} \{ \mathbb{E}^Q[X] + \lambda H[Q|P] \}.$$

ここで、 \mathcal{Q} は P と同値な確率測度の集合であり、 λ は正の定数、そして $H[Q|P]$ は相対エントロピーである。相対エントロピー $H[Q|P]$ は一種の距離測度であり、確率測度 P と Q の近さを表現する。たとえば、もし $Q = P$ なら $H[Q|P] = 0$ である。また、任意の Q に対して $H[Q|P] \geq 0$ である。正の定数 λ は投資家がどの程度参照確率測度 P に信頼を置いているかを示すパラメータである。たとえば、 $\lambda = 0$ はまったく P に信頼を置いていない場合である。実際、このとき上の問題は Maxmin 期待効用と同じアプローチへと還元される。逆に $\lambda \rightarrow \infty$ は P を完全に信頼している場合を表している。実際、このとき上の問題の解は自明に $Q = P$ であり、最適戦略は $\mathbb{E}^P[X]$ に対して導出されることになる。

つまり、 P に対する信頼が薄く λ が小さいほど、 P のことを勘案せずにペイオフの期待値を小さくするようなモデルが選ばれるし、 P に対する信頼が

厚いほど λ が大きく、 P となるべく近い Q を選ぶことで $\lambda H[Q|P]$ を小さくしつつペイオフの期待値を小さくしなければならない。これが相対エントロピーを用いてモデル・リスクを勘案する手法の本質である。本研究はこのような問題をペアー・トレーディングについて明示的に解いたところに特徴がある。

本最終報告書は以下のような構成をもつ。次の節では本研究の枠組みとモデルの不確実性を勘案しない、ベースとなる結果を紹介する。第3節ではモデルの不確実性を勘案した閾値を示す。第4節では実データを用いた数値例を示す。

2 最適停止問題の設定

確率空間は $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ で与えられるとする。ここで、 $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, \infty)}$ とする。また、 \mathcal{F}_0 は自明な σ フィールドとし、 \mathcal{F} はすべての \mathcal{F}_t , $t \in [0, \infty)$ の結合から生成される σ フィールドと仮定する。

ペアー・トレーディングは二つの銘柄の価格を線形結合して生成した確率過程のうち平均回帰性をもつペアーを利用するトレーディング手法である。

平均回帰性をもつ確率過程として Elliott et al. (2005) と同様に、我々も Ornstein-Uhlenbeck 過程を考える。ここで、Ornstein-Uhlenbeck 過程 \hat{X}_t は以下のように記述される。

$$d\hat{X}_t = -\mu(\hat{X}_t - \alpha)dt + \sigma dW_t, \quad \hat{X}_0 = \alpha, \quad (1)$$

ここで μ, σ は正の定数であり、それぞれ回帰速度とボラティリティを表す。また α は平均回帰水準である。そして、 W_t は P -ブラウン運動である。簡単のため、 $X_t := \hat{X}_t - \alpha$ を定義すると、以下が成り立つ。

$$dX_t = -\mu X_t dt + \sigma dW_t, \quad X_0 = 0. \quad (2)$$

こうして得られた過程 X_t に対して、以下の最適停止問題を考える。

$$v^0(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathbb{E}_x[e^{-\rho\tau} X_\tau], \quad (3)$$

ここで、 \mathcal{T} は W に関するすべての停止時刻の集合とし、 ρ は割引率とする。また、 $\mathbb{E}\tau < \infty$ をすべての $\tau \in \mathcal{T}$ に対して仮定する。問題 (3) の解が示唆するトレーディング戦略はたとえば、得られた解の水準に銘柄のペアー X がタッチした時ショートし、やがて X がゼロに回帰した時ポジションを解消する、あるいは逆に X がゼロのときにロングし、問題 (3) の解が示す水準に X が到達したときにポジションを解消して利益を確定するといったものが考えられる。

ここで、時点 t を現時点とし、この時点におけるペアーの価値を $x = X_t$ で条件付けよう。そのうえで、 $e^{-\rho t} v^0(x)$ を解くことにする。伊藤の補題を用いると、以下が成り立つ。

$$\begin{aligned} d(e^{-\rho t} v^0(x)) &= -\rho e^{-\rho t} v^0(x) dt + \frac{\partial e^{-\rho t} v^0(x)}{\partial x} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 e^{-\rho t} v^0(x)}{\partial x^2} d\langle X \rangle_t \\ &= \left(-\rho e^{-\rho t} v^0(x) - e^{-\rho t} \mu x v_x^0(x) + \frac{1}{2} e^{-\rho t} \sigma^2 v_{xx}^0(x) \right) dt + e^{-\rho t} \sigma dW_t. \end{aligned}$$

Peskir and Shiryaev (2006) の Theorem 2.4 と 2.7 によれば問題 (3) は次のような閾値 b が存在を保証してくれる。すなわち、 $x \geq b$ のときは $v^0(b) = b$ であり、そうでないときは $v^0(x) > x$ である。また、マルチンゲール性も必要となり、

$$\frac{1}{2} \sigma^2 v_{xx}^0(x) - \mu x v_x^0(x) - \rho v^0(x) = 0.$$

となる。さらに、Peskir and Shiryaev (2006) の Theorem 9.5 はスムーズ・フィット条件も要請する。すなわち $x = b$ のとき $v_x^0(b) = 1$ である。結局、以下の自由境界問題を解くことが必要となる。

$$-\mu x v_x^0 + \frac{1}{2} \sigma^2 v_{xx}^0 = \rho v^0 \text{ for } x < b, \quad (4)$$

$$v^0(b) = b \text{ for } x \geq b, \quad (5)$$

$$v_x^0(b) = 1 \text{ for } x = b. \quad (6)$$

実は、これは容易に解くことができ、 $v^0(x)$ は以下の形式で表現することができる。

$$v^0(x) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\mu}} \frac{\int_0^\infty u^{\frac{\rho}{\mu}-1} e^{\frac{\sqrt{2\mu}}{\sigma} u x - \frac{u^2}{2}} du}{\int_0^\infty u^{\frac{\rho}{\mu}} e^{\frac{\sqrt{2\mu}}{\sigma} u b - \frac{u^2}{2}} du}.$$

さらに、境界 b^* は以下を満たす。

$$\frac{\sigma}{\sqrt{2\mu}} \frac{\int_0^\infty u^{\frac{\rho}{\mu}-1} e^{\frac{\sqrt{2\mu}}{\sigma} u b^* - \frac{u^2}{2}} du}{\int_0^\infty u^{\frac{\rho}{\mu}} e^{\frac{\sqrt{2\mu}}{\sigma} u b^* - \frac{u^2}{2}} du} = b^*. \quad (7)$$

次に節ではモデル・リスクが存在するときに最適な境界がどのように導出されるかを検討する。

3 主要な結果

モデル・リスクの本質は戦略を導出するにあたって用いている参照確率測度 P が真の確率測度を表現しているのかどうか不確かである、という点にある。そこで、我々は (Ω, \mathcal{F}) 上の確率測度からなる族 Q を定義する。ここで、もっとも直感的な方法でモデル・リスクを除去するのであれば、以下のような問題を考えることだ。

$$\sup_{\tau \in \mathcal{T}} \inf_{Q \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}_x^Q [e^{-\rho(\tau-t)} X_\tau]. \quad (8)$$

このような定式化により導かれた戦略は「頑健」と言われる。

しかし、このアプローチで得られる戦略はしばしば投資をしないことが最適、という少なくとも市場に参加せざるをえない投資家にとっては無意味な解が導出してしまう。たしかにこのような戦略は「頑健」ではあるものの、株式投資によって利益を欲している場合には意味がない。

それゆえ、我々はより柔軟な取引戦略を考えたい。すなわち、以下のような問題を時点 t で $x = X_t$ と条件づけたうえで考えたい。

$$v(t, x) := \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathbb{E}_x^Q [e^{-\rho(\tau-t)} X_\tau], \quad (9)$$

ここで Q は以下の問題の解とする。

$$\inf_{Q \in \mathcal{Q}} \left\{ \mathbb{E}_x^Q [e^{-\rho(\tau-t)} X_\tau] + \lambda e^{-\rho(\tau-t)} H_x[Q|P] \right\}. \quad (10)$$

また、 λ は正の定数、 $H(\cdot)$ は以下で定義される相対エントロピーとする。

$$H_x(Q|P) := \begin{cases} \mathbb{E}_x^Q \left[\ln \left(\frac{dQ}{dP} \right) \right], & Q \in \mathcal{Q} \\ \infty, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (11)$$

定数 λ は投資家がどれだけ参照確率測度 P が真の測度と近いかを表す尺度として用いられる。すなわち、 $\lambda \uparrow \infty$ のとき、投資家は参照確率測度 P を完全に信じているし、逆に $\lambda \downarrow 0$ のとき、投資家は参照確率測度 P にまったく自信を持っていない。さらに、(9) に対する最適な閾値 $b(t)$ は $t = 0$ で b^* と合致すると仮定する。すなわち $b(0) = b^*$ である。このとき、以下が成り立つ。

Theorem 3.1 $t \in [0, \infty)$ とする。問題 (9) について最適な境界 $b(t)$ は以下を満たすように与えられる。

$$\begin{aligned} \ln(b(t)) + \frac{1}{\sigma^2} \frac{\rho}{\mu - \rho} (g(t) - b(t))^2 \\ = \ln b^* + \frac{1}{\sigma^2} \frac{\rho}{\mu - \rho} (b^*)^2, \end{aligned}$$

ここで $g(t) = -\frac{\sigma^2}{\lambda} t e^{-\mu t}$ 。

定理 3.1 に従えば、ペア X_t を保有している投資家は X_t が境界 $b(t)$ にタッチしたときポジションを解消すべきであるし、またポジションとして X_t を持っていないならば、 X_t が $b(t)$ にタッチした時にショートして、平均回帰水準 0 にタッチした時ポジションを解消すればよい。

4 数値例

最後に、東京証券取引所から取得した株価データをもちいて数値例を示す。ここでは相対的に PER (Price Earnings Ratio) が低い (1 から 5 程度) と考えられる 20 の銘柄を選んだ。これは東京証券取引所に上場している銘柄の平均 PER がおおむね 15 程度と考えれば、低いと言ってよいだろう。具体的には以下の銘柄である。フルキャスト・ホールディングス (銘柄コード: 4848), 第一商品 (8746), 富士石油 (5017), フィデアホールディングス (8713), ヨシコン (5280), ぱど (4833), 佐渡汽船 (9176), 常磐開発 (1782), 明和地所 (8869), 大井電気 (6822), タカタ (7312), 東栄リーフライン (9133), 日本ハウスホールディングス (1873), 三栄建設設計 (3228), 新報国製鉄 (5542), 大興電子通信 (8023), 新日本建設 (1879), 朝日工業 (5456), 星和電機 (6748), そして大末建設 (1814) である。

これらの銘柄の 2015 年 3 月 26 日から 2015 年 5 月 25 日までの終値データをサンプリングし可能なすべてのペアの組み合わせに対して Phillips-Ouliaris 共和分検定を p 値 0.05 でテストした。その結果、190 (= $20!/2!18!$) のペアの組み合わせから 6 つの共和分をもつペアを見つけることができた。すなわち (第一商品 (8746), 朝日工業 (5456)), (富士石油 (5017), 佐渡汽船 (9176)), (富士石油 (5017), タカタ (7312)), (ぱど (4833), 大井電気 (6822)), (ぱど (4833), 星和電機 (6748)), そして (佐渡汽船 (9176), 大興電子通信 (8023)) である。

ペアを見つけたら、次に Ornstein-Uhlenbeck 過程のパラメータ、すなわち μ, α そして σ を最尤法で推定する。例えば、第一商品 (8746) と朝日工業 (5456) のペアの価値は以下のようなパラメータをもつと推定された。

$$\mu = 0.99, \sigma = 5.19, \alpha = 231.73.$$

最適な閾値を求めるにはさらに ρ と λ のパラメータを決める必要がある。ここで、 ρ は 0.004 と設定した。これは、日本銀行の金融経済統計月報 (2015 年 5 月) で 10 年国債のイールドがおおむね 0.40–0.45% で推移していたとのレポートによる。

最期にパラメータ λ であるが、これは投資家のモデルに対する信頼度に依存する。低い λ は低い信頼度を、高い λ は高い信頼度を意味する。そこで、ここでは 4 つのケース、すなわち $\lambda = 0.001, 0.01, 0.1$ そして $\lambda = +\infty$ を想定することとした。ただし、 $\lambda = +\infty$ のケースは閾値に b^* を用いることと等しい。これらのパラメータを用いて、最適な閾値 $b(t)$ を計算し、図 1 に結果を示した。ここで λ の 4 つのケースそれぞれに対して閾値 $b(t)$ を示すと同時に、

2015年5月25日から2015年6月26日までのペアの価値も同時に図示した。これはつまりアウトオブサンプルに対しての有効性を確かめるためである。この図が示すように、有限な λ に対する閾値 $b(t)$ は λ が大きくなるにつれ b^* に収束し、 λ が無限になると、たしかに b^* と合致し、理論の示す通りの結果となった。

さらに、実データを用いてペア・トレーディングのパフォーマンスについても考察する。そこで、以下のように投資戦略を決める：まずペアの価値が閾値 $b(t)$ もしくは平均収束水準 α にタッチした時ポジションを組む。もし、閾値 $b(t)$ に触れてポジションを組んだときは、ペアの価値が平均収束水準に触れるときまでポジションを解消しない。逆の場合もまた同様である。そして、ポジションを解消した後に、次にポジションを組むのはペアの価値がやはり $b(t)$ もしくは α にタッチしたときであり、これを流動化するのも上記と同じルールによる。このような投資戦略で投資収益率を計算した。シミュレーション期間は2015年の5月25日から2015年9月2日までである。この投資戦略に基づく収益率は表1にまとめた。

ところで、Gatev et al. (2006); Avellaneda and Lee (2010) が指摘するように、ペアトレーディングで収益を上げるにあたって取引費用がしばしば障害となる。というのも、ペアトレーディングの一回の取引では二倍の手数料がかかるからだ。これは、ペアを構成するために二つの銘柄を購入（売却）せねばならないからだ。さらに、投資家がペアの価値の動きに合わせて頻繁に利益を確定する場合、高頻度の取引が必要となる。これも取引費用をかさませる要因となりうる。そこで、今回のシミュレーションにおいては、取引手数料を差し引いて収益率を計算することにした。表1の結果はあらかじめ手数料率を割り引いている。実際の取引手数料はマーケット・メーカー（証券会社）によるのだが、一銘柄の取引にたいして おおよそ0.1%と考えた。そのうえで、今回のシミュレーションはペア・トレーディングなので、ポジションをとるたび、あるいは解消するたびに0.2%の取引手数料を割り引くことにした。

こうして得られた数値例を評価するために、他の取引戦略との比較を行う。ここではバイ・アンド・ホールド戦略との比較を試みた。今回の数値例で用いた銘柄はすべて低PER銘柄であるので、バイ・アンド・ホールド戦略の候補となる銘柄としては適格といってよいだろう。

バイ・アンド・ホールド戦略でも同様に、サンプルには2015年5月25日から2015年9月2日までの株価データを用いた。すなわち、バイ・アンド・ホールド戦略により、2015年5月25日にポジションを組んで、2015年9月2日にポジションを解消する。このシンプルな戦略から得られた収益率を表2にまとめた。

この戦略を実行した場合、少数の例外を除き、ほぼすべての銘柄でロスが生じた。もちろん、これはたまたまこの期間においてだけのことかもしれないが、仮にPER以外の割安基準を用いて銘柄を選んだ上でバイ・アンド・ホールド戦略を実行し、そして高収益を実現したとしても、少なくともこれ

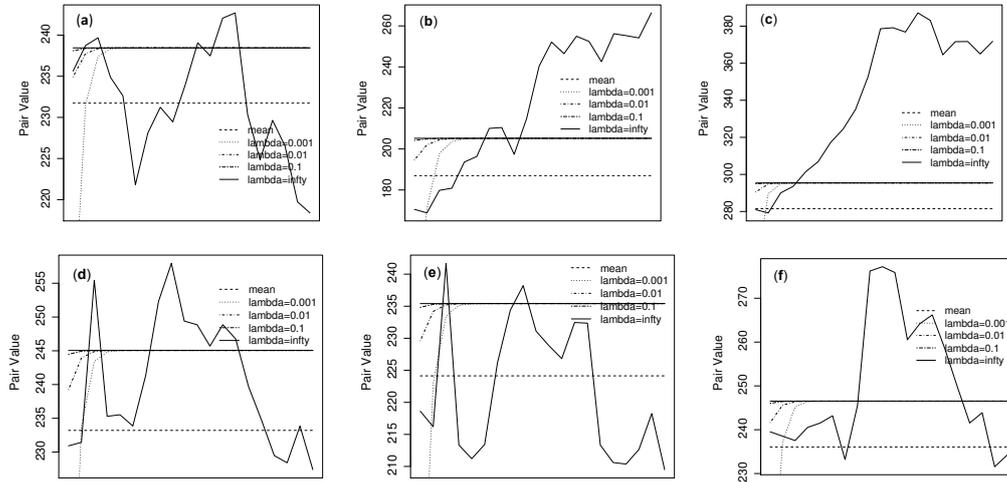


Figure 1: ペアの価値、平均値、閾値について示した。(a)は第一商品(8746)と朝日工業(5456)のペアの価値である。(b)は富士石油(5017)と佐渡汽船(9176)、(c)は富士石油(5017)とタカタ(7312)、(d)ははぽど(4833)と大井電気(6822)、(e)ははぽど(4833)と星和電機(6748)、そして(f)は佐渡汽船(9176)と大興電子通信(8023)である。

	$\lambda = 0.001$	$\lambda = 0.01$	$\lambda = 0.1$	$\lambda = +\infty$
Pair 1	0.152	0.152	0.165	0.165
Pair 2	0.321	0.170	0.170	0.170
Pair 3	0.071	0.028	0.028	0.028
Pair 4	0.189	0.076	0.076	0.076
Pair 5	0.097	0.088	0.088	0.088
Pair 6	0.093	0.133	0.133	0.133

Table 1: 異なる λ に対する収益率。Pair 1は第一商品(8746)と朝日工業(5456)のペアである。Pair 2は富士石油(5017)と佐渡汽船(9176)、Pair 3は富士石油(5017)とタカタ(7312)、Pair 4ははぽど(4833)と大井電気(6822)、Pair 5ははぽど(4833)と星和電機(6748)、そしてPair 6は佐渡汽船(9176)と大興電子通信(8023)である。

が安定的な戦略ではないように思える。すなわち、表1の結果も鑑みれば、ペアー・トレーディングの安定性は示されたといってよいだろう。そして、これがモデルの不確実性を勘案しつつペアー・トレーディングを提案するゆえんである。

銘柄	収益率
フルキャスト・ホールディングス (銘柄コード: 4848)	0.099
第一商品 (8746)	-0.113
富士石油 (5017)	-0.091
フィデアホールディングス (8713)	-0.125
ヨシコン (5280)	0.016
ぱど (4833)	-0.157
佐渡汽船 (9176)	-0.016
常磐開発 (1782)	-0.047
明和地所 (8869)	-0.026
大井電気 (6822)	-0.059
タカタ (7312)	-0.034
東栄リーファーライン (9133)	-0.147
日本ハウスホールディングス (1873)	-0.076
三栄建設設計 (3228)	0.521
新報国製鉄 (5542)	-0.275
大興電子通信 (8023)	-0.226
新日本建設 (1879)	0.193
朝日工業 (5456)	-0.121
星和電機 (6748)	-0.050
大末建設 (1814)	-0.129

Table 2: 低 PER 銘柄に対するバイ・アンド・ホールド戦略の収益率

A 定理 3.1 の証明

問題 (10) の対象について以下が成り立つことに注意せよ。

$$\int \left(e^{-\rho(\tau-t)} X_\tau + \lambda e^{-\rho(\tau-t)} \ln \left(\frac{dQ}{dP} \right) \right) dQ = \lambda e^{-\rho(\tau-t)} \int \ln \left(e^{X_\tau/\lambda} \frac{dQ}{dP} \right) dQ.$$

相対エントロピー $H[Q|P]$ は $Q = P$ のとき最小化されることに注意すると、上式より問題 (10) は以下が成り立つとき最小化されることがわかる³、

$$\frac{dQ}{dP}\Big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{e^{-X_t/\lambda}}{\mathbb{E}_x[e^{-X_t/\lambda}]} \quad (12)$$

ところで $dX_t = -\mu X_t dt + \sigma dW_t$ から $X_t = e^{-\mu t} \left(X_0 + \int_0^t \sigma e^{\mu s} dW_s \right)$ がいえるが、これより以下がいえる。

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dP}\Big|_{\mathcal{F}_t} &= \frac{e^{-X_t/\lambda}}{\mathbb{E}_x[e^{-X_t/\lambda}]} = \frac{e^{-\frac{1}{\lambda} e^{-\mu t} \left(X_0 + \int_0^t \sigma e^{\mu s} dW_s \right)}}{\mathbb{E}_x \left[e^{-\frac{1}{\lambda} e^{-\mu t} \left(X_0 + \int_0^t \sigma e^{\mu s} dW_s \right)} \right]} \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{\lambda} \int_0^t \sigma e^{\mu(s-t)} dW_s}}{\mathbb{E}_x \left[e^{-\frac{1}{\lambda} \int_0^t \sigma e^{\mu(s-t)} dW_s} \right]} \end{aligned}$$

上式と Girsanov, Cameron and Martin 定理より、 Q -ブラウン運動 W^* は以下で与えられる。

$$W_t^* = W_t + \frac{\sigma}{\lambda \mu} (1 - e^{-\mu t}).$$

それゆえ、 X は以下の確率微分方程式で記述できる。

$$dX_t = -\left(\mu X_t + \frac{\sigma^2}{\lambda} e^{-\mu t} \right) dt + \sigma dW_t^*. \quad (13)$$

さて、最適停止問題を $x = X_t$ で条件付けて定式化すると以下で与えられる。

$$v^1(t, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathbb{E}_x^Q[e^{-\rho \tau} X_\tau]$$

さらに、 $t \uparrow \infty$ のとき、(13) における X は (2) におけるそれと等しいことがわかる。よって、 $\lim_{t \uparrow \infty} v^1(t, x) = v^0(x)$ が成り立つ。

ここで、 $v(t, x) = e^{-\rho t} v^1(t, x)$ に伊藤の補題を適用すると、以下がいえる。

$$\begin{aligned} d(e^{-\rho t} v^1(t, x)) &= -\rho e^{-\rho t} v^1 dt + e^{-\rho t} v_t^1 dt + e^{-\rho t} v_x^1 dX_t + \frac{1}{2} e^{-\rho t} v_{xx}^1 d\langle X \rangle_t \\ &= -\rho e^{-\rho t} v^1 dt + e^{-\rho t} v_t^1 dt + e^{-\rho t} v_x^1 \left(-\left(\mu X_t + \frac{\sigma^2}{\lambda} e^{-\mu t} \right) dt + \sigma dW_t^* \right) + \frac{1}{2} e^{-\rho t} v_{xx}^1 \sigma^2 dt \\ &= \left(-\rho e^{-\rho t} v^1 + e^{-\rho t} v_t^1 - e^{-\rho t} v_x^1 \left(\mu X_t + \frac{\sigma^2}{\lambda} e^{-\mu t} \right) + \frac{1}{2} e^{-\rho t} v_{xx}^1 \sigma^2 \right) dt + e^{-\rho t} v_x^1 \sigma dW_t^*. \end{aligned}$$

³より詳細な手続きは Detlefsen and Scandolo (2005) や Föllmer and Penner (2006) を参照されたい。

Peskir and Shiryaev (2006) の Theorem 2.4 と 2.7 により、閾値 $b(t)$ について $x \geq b(t)$ のとき $v^1(t, b(t)) = b(t)$ 、さもなければ $v^1(t, x) > x$ が成り立つ。また、マルチンゲール性、すなわち

$$-\rho v^1 + v_t^1 - \left(\mu X_t + \frac{\sigma^2}{\lambda} e^{-\mu t} \right) v_x^1 + \frac{1}{2} \sigma^2 v_{xx}^1 = 0.$$

も必要となる。また Peskir and Shiryaev (2006) の Theorem 9.5 により $x = b(t)$ のとき $v_x^1(t, b(t)) = b'(t)$ である。

それゆえ、自由境界問題は以下のように与えられる。

$$-\rho v^1 + v_t^1 - \left(\mu X_t + \frac{\sigma^2}{\lambda} e^{-\mu t} \right) v_x^1 + \frac{1}{2} \sigma^2 v_{xx}^1 = 0 \text{ for } x < b(t), \quad (14)$$

$$v^1(t, b(t)) = b(t) \text{ for } x \geq b(t), \quad (15)$$

$$\partial v^1(t, b(t))/\partial t = b'(t) \text{ for } x = b(t). \quad (16)$$

ここで $v^1(t, x) = c_1 \int_0^\infty u^{\frac{\rho}{\mu}-1} e^{\frac{\sqrt{2\mu}}{\sigma}(x-g(t))u - \frac{u^2}{2}} du + c_2$ としよう。ただし、 $g(t) = -\frac{\sigma^2}{\lambda} t e^{-\mu t} + c_3 e^{-\mu t}$ とする。また、 $v^1(t, -\infty) = c_2 = 0$ に注意せよ。すると、 $\lim_{t \rightarrow \infty} v^1(t, x) = c_1 \int_0^\infty u^{\frac{\rho}{\mu}-1} e^{\frac{\sqrt{2\mu}}{\sigma} x u - \frac{u^2}{2}} du$ である。ただし $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$ を用いた。このとき以下が成り立つ。

$$c_1 \int_0^\infty u^{\frac{\rho}{\mu}-1} e^{\frac{\sqrt{2\mu}}{\sigma} x u - \frac{u^2}{2}} du = v^0(x) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\mu}} \frac{\int_0^\infty u^{\frac{\rho}{\mu}-1} e^{\frac{\sqrt{2\mu}}{\sigma} u x - \frac{u^2}{2}} du}{\int_0^\infty u^{\frac{\rho}{\mu}} e^{\frac{\sqrt{2\mu}}{\sigma} u b^* - \frac{u^2}{2}} du}.$$

これより $c_1 = \frac{\sigma}{\sqrt{2\mu}} \frac{1}{\int_0^\infty u^{\frac{\rho}{\mu}} e^{\frac{\sqrt{2\mu}}{\sigma} u b^* - \frac{u^2}{2}} du}$ がいえる。結局、 $v^1(t, x)$ は以下の形で与えられることがわかる。

$$v^1(t, x) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\mu}} \frac{\int_0^\infty u^{\frac{\rho}{\mu}-1} e^{\frac{\sqrt{2\mu}}{\sigma}(x-g(t))u - \frac{u^2}{2}} du}{\int_0^\infty u^{\frac{\rho}{\mu}} e^{\frac{\sqrt{2\mu}}{\sigma} u b^* - \frac{u^2}{2}} du}.$$

(15) を用いれば以下がいえる。

$$v^1(t, b(t)) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\mu}} \frac{\int_0^\infty u^{\frac{\rho}{\mu}-1} e^{\frac{\sqrt{2\mu}}{\sigma}(b(t)-g(t))u - \frac{u^2}{2}} du}{\int_0^\infty u^{\frac{\rho}{\mu}} e^{\frac{\sqrt{2\mu}}{\sigma} u b^* - \frac{u^2}{2}} du} = b(t). \quad (17)$$

また、(16) によれば以下が成り立つ。

$$\begin{aligned} & v_t^1(t, b(t)) + v_x^1(t, b(t)) b'(t) \\ &= -g'(t) \frac{\int_0^\infty u^{\frac{\rho}{\mu}} e^{\frac{\sqrt{2\mu}}{\sigma} u (b(t)-g(t)) - \frac{u^2}{2}} du}{\int_0^\infty u^{\frac{\rho}{\mu}} e^{\frac{\sqrt{2\mu}}{\sigma} u b^* - \frac{u^2}{2}} du} + \frac{\int_0^\infty u^{\frac{\rho}{\mu}} e^{\frac{\sqrt{2\mu}}{\sigma} u (b(t)-g(t)) - \frac{u^2}{2}} du}{\int_0^\infty u^{\frac{\rho}{\mu}} e^{\frac{\sqrt{2\mu}}{\sigma} u b^* - \frac{u^2}{2}} du} b'(t) = b'(t). \end{aligned}$$

つまり、以下がいえる。

$$\begin{aligned}
b'(t) &= (b'(t) - g'(t)) \frac{\int_0^\infty u^\frac{\rho}{\mu} e^{\frac{\sqrt{2\mu}}{\sigma} u(b(t)-g(t)) - \frac{u^2}{2}} du}{\int_0^\infty u^\frac{\rho}{\mu} e^{\frac{\sqrt{2\mu}}{\sigma} ub^* - \frac{u^2}{2}} du} \\
&= (b'(t) - g'(t)) \frac{-\frac{\rho/\mu}{1-\rho/\mu} \left(\frac{\sqrt{2\mu}}{\sigma} (b(t) - g(t)) \right) \int_0^\infty u^{\frac{\rho}{\mu}-1} e^{\frac{\sqrt{2\mu}}{\sigma} u(b(t)-g(t)) - \frac{u^2}{2}} du}{\int_0^\infty u^\frac{\rho}{\mu} e^{\frac{\sqrt{2\mu}}{\sigma} ub^* - \frac{u^2}{2}} du}, \quad (18)
\end{aligned}$$

ここで、以下が成り立つことを用いた。

$$\int_0^\infty u^\frac{\rho}{\mu} e^{\frac{\sqrt{2\mu}}{\sigma} u(b(t)-g(t)) - \frac{u^2}{2}} du = -\frac{\rho/\mu}{1-\rho/\mu} \left(\frac{\sqrt{2\mu}}{\sigma} (b(t) - g(t)) \right) \int_0^\infty u^{\frac{\rho}{\mu}-1} e^{\frac{\sqrt{2\mu}}{\sigma} u(b(t)-g(t)) - \frac{u^2}{2}} du.$$

(17) を (18) に代入すれば、以下がいえる

$$\frac{b'(t)}{b'(t) - g'(t)} = -\frac{2\mu}{\sigma^2} \frac{\rho/\mu}{1-\rho/\mu} (b(t) - g(t)) b(t).$$

それゆえ、 $b(t)$ は以下のように与えられる。

$$\ln(b(t)) + \frac{1}{\sigma^2} \frac{\rho}{\mu - \rho} (g(t) - b(t))^2 = a_4,$$

ここで $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$ より $a_4 = \ln b^* + \frac{1}{\sigma^2} \frac{\rho}{\mu - \rho} (b^*)^2$ である。

また、 $t \rightarrow 0$ のとき、 $g(t) \rightarrow c_3$ となる。よって、以下がいえる。

$$\ln(b^*) + \frac{1}{\sigma^2} \frac{\rho}{\mu - \rho} (c_3 - b^*)^2 = \ln b^* + \frac{1}{\sigma^2} \frac{\rho}{\mu - \rho} (b^*)^2.$$

これは $c_3 = 0$ 意味する。以上で証明は完了した。

Q.E.D.

B 最尤法による Ornstein-Uhlenbeck 過程のパラメータ推定について

本研究で行った数値例において、Ornstein-Uhlenbeck 過程 (OU 過程) のパラメータを用いているが、これは実データから推定されたものである。ただし、本文においては単に最尤法で推定したと述べたのみである。そこで、本研究の最後に、具体的にどのようにパラメータ推定したのかについて補足しておきたい。

ここで、ある確率過程 $(\hat{X}_t)_{t \in [0, \infty)}$ が OU 過程に従うとは

$$d\hat{X}_t = -\mu(\hat{X}_t - \alpha)dt + \sigma dW_t \quad (19)$$

と表現できるときである。ペアーに関する実データ系列を持っていることを前提に、最尤法で最適なパラメータ (μ, α, σ) を求めたい。⁴

時点 $s < t$ での値 \hat{X}_s を条件にして、確率微分方程式 (19) を解くと以下が得られる。

$$\hat{X}_t = \hat{X}_s e^{-\alpha(t-s)} + \mu(1 - e^{-\alpha(t-s)}) + \sigma \int_s^t e^{-\alpha(t-u)} dW_u. \quad (20)$$

(20) から、 \hat{X}_t は Gaussian であることがわかる。したがって、 \hat{X}_t の確率分布はその平均と分散で完全に決定されるが、その平均・分散は \hat{X}_s を所与として以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\hat{X}_t | \hat{X}_s] &= \hat{X}_s e^{-\alpha(t-s)} + \mu(1 - e^{-\alpha(t-s)}), \\ \text{Var}(\hat{X}_t | \hat{X}_s) &= \sigma^2 \int_s^t e^{-2\alpha(t-u)} du = \sigma^2 \frac{1}{2\alpha} e^{-2\alpha(t-u)} \Big|_s^t = \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha(t-s)}). \end{aligned}$$

ここで、 \hat{X}_{t-1} で条件づけた \hat{X}_t の平均・分散を $\bar{\mu}_t$ 、 $\bar{\sigma}_t^2$ とすると、これらはそれぞれ以下で与えられる。

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_t &= \hat{X}_{t-1} e^{-\alpha\Delta t} + \mu(1 - e^{-\alpha\Delta t}), \\ \bar{\sigma}_t^2 &\equiv \bar{\sigma}_t^2 = \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha\Delta t}). \end{aligned}$$

ただし、 $\Delta t = t - (t-1)$ とした。以上より、 \hat{X}_{t-1} を条件にした (つまり観測したうえで) \hat{X}_t の確率密度関数は $f(x | \bar{\mu}_t, \bar{\sigma}_t^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{\sigma}_t^2}} e^{-\frac{(x-\bar{\mu}_t)^2}{2\bar{\sigma}_t^2}}$ で与えられることがわかる。ここで、 \hat{X}_t を時点 $t = 1, \dots, T$ で観測し、サンプルが x_1, \dots, x_T だけ得られたとしよう。各観測時点の間隔は Δt である。Gaussian なので、各サンプル

⁴直感的には例えば実データ $\{y_t; t = 1, \dots, T\}$ の系列の平均 $\bar{y} = (y_1 + \dots + y_T)/T$ を回帰水準 α に、そして分散 $\text{Var}(y_t) = \sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2 / T$ を σ^2 にあてがうことなどが考えられる。しかし、それでは回帰速度 μ はどうすればよいのか、という問題が残る。このように、単純に見えるパラメータ推定であっても実はそれほど単純ではないことがある。

さらに、仮に最適なパラメータを導出したとして、そもそも仮定しているモデルが果たして OU 過程でよいのか、という問題もある。回帰水準する確率過程はほかにもあるからだ。たとえば、同じような OU 過程でもジャンプが含まれるモデルなどは最も単純な拡張であろう。

ただし、本研究においてはこのようなモデルの過誤はいったん置いておき、確率分布の推定すなわちパラメータ推定の過誤に議論を絞っている。

は独立同一分布で、それぞれ $t = 1, \dots, T$ に対して $f(x_t | \bar{\mu}_t, \bar{\sigma}^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{\sigma}^2}} e^{-\frac{(x_t - \bar{\mu}_t)^2}{2\bar{\sigma}^2}}$ の密度関数が決まる。そして、同時確率密度は

$$f(x_1, \dots, x_T) = \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{\sigma}_t^2}} e^{-\frac{(x_t - \bar{\mu}_t)^2}{2\bar{\sigma}_t^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{\sigma}^{2T}}} e^{-\frac{\sum_{t=1}^T (x_t - \bar{\mu}_t)^2}{2\bar{\sigma}^2}}.$$

この対数尤度 $L(\alpha, \mu, \sigma^2) := \ln f(x_1, \dots, x_T)$ を定義し、最尤法を適用する。すなわち、以下を考える。

$$\max_{\alpha, \mu, \sigma} L(\alpha, \mu, \sigma).$$

まず一階条件であるが、これは以下で与えられる。

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = \frac{\partial L}{\partial \mu} = \frac{\partial L}{\partial \sigma^2} = 0$$

さて、この一階条件を計算してゆこう。最初に $\partial L / \partial \mu$ を計算する。

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = \frac{T(1 - e^{-\alpha\Delta t})}{\bar{\sigma}^2} \sum_{t=1}^T (x_t - \mu - (x_{t-1} - \mu)e^{-\alpha\Delta t}) = 0.$$

ここで、

$$\frac{\partial \bar{\mu}_t}{\partial \mu} = \frac{\partial (x_{t-1}e^{-\alpha\Delta t} + \mu(1 - e^{-\alpha\Delta t}))}{\partial \mu} = 1 - e^{-\alpha\Delta t}, \quad \frac{\partial \bar{\sigma}^2}{\partial \mu} = 0$$

を用いた。また、 $\alpha > 0$ (これは定義より $\bar{\sigma}^2 > 0$ を含意する。) より、一階条件は

$$\sum_{t=1}^T (x_t - \mu - (x_{t-1} - \mu)e^{-\alpha\Delta t}) = 0,$$

すなわち

$$\mu = \frac{1}{1 - e^{-\alpha\Delta t}} \frac{\sum_{t=1}^T (x_t - x_{t-1}e^{-\alpha\Delta t})}{T} \quad (21)$$

を意味する。

同様に、以下がいえる。

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma^2} = \frac{T}{2\bar{\sigma}^2} \left(-1 + \frac{\sum_{t=1}^T (x_t - \mu - (x_{t-1} - \mu)e^{-\alpha\Delta t})^2 / T}{\frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha\Delta t})} \right) \frac{1 - e^{-2\alpha\Delta t}}{2\alpha} = 0$$

ここで、

$$\frac{\partial \bar{\mu}_t}{\partial \sigma^2} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\sigma}^2}{\partial \sigma^2} = \frac{1 - e^{-2\alpha\Delta t}}{2\alpha}$$

を用いた。これより、以下が必要になる。

$$\sigma^2 = \frac{2\alpha}{1 - e^{-2\alpha\Delta t}} \frac{\sum_{t=1}^T (x_t - \mu - (x_{t-1} - \mu)e^{-\alpha\Delta t})^2}{T} \quad (22)$$

最後に、 $\partial L / \partial \alpha = 0$ を計算する必要がある。これは以下で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \alpha} = & \frac{T}{\bar{\sigma}^2} \left(\frac{1}{2} \left(-1 + \frac{\sum_{t=1}^T (x_t - \mu - (x_{t-1} - \mu)e^{-\alpha\Delta t})^2 / T}{\frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha\Delta t})} \right) \frac{\sigma^2}{\alpha} \left(-\frac{1}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha\Delta t}) + \Delta t e^{-2\alpha\Delta t} \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (x_t - \mu - (x_{t-1} - \mu)e^{-\alpha\Delta t})(x_{t-1} - \mu) \Delta t e^{-\alpha\Delta t} \right) = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

ここで、

$$\frac{\partial \bar{\mu}_t}{\partial \alpha} = -(x_{t-1} - \mu) \Delta t e^{-\alpha\Delta t}, \quad \frac{\partial \bar{\sigma}^2}{\partial \alpha} = \frac{\sigma^2}{\alpha} \left(-\frac{1}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha\Delta t}) + \Delta t e^{-2\alpha\Delta t} \right)$$

を用いた。 α は (23) を満たすように与えられる。これは煩雑に見えるが、数値計算上は特に問題ない。

また、上で得られた一階条件を満たすような (μ, σ^2, α) のもとで尤度関数 $L(\cdot, \cdot, \cdot)$ の凹性を示すためには、Hessian 行列が負定値であることを示せばよい。Hessian 行列は以下で与えられる。

$$\begin{aligned} H := & \begin{pmatrix} L_{\mu\mu} & L_{\mu\sigma^2} & L_{\mu\alpha} \\ L_{\sigma^2\mu} & L_{\sigma^2\sigma^2} & L_{\sigma^2\alpha} \\ L_{\alpha\mu} & L_{\alpha\sigma^2} & L_{\alpha\alpha} \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} \frac{T(1-e^{-\alpha\Delta t}) \sum_{t=1}^T (-1+e^{-\alpha\Delta t})}{\bar{\sigma}^2} & 0 & \frac{2\alpha T}{\sigma^2(1+e^{-\alpha\Delta t})} \sum_{t=1}^T ((x_{t-1} - \mu) \Delta t e^{-\alpha\Delta t}) \\ 0 & \frac{T}{2\sigma^2} \left(-\frac{\sum_{t=1}^T (x_t - \mu - (x_{t-1} - \mu)e^{-\alpha\Delta t})^2 / T}{\frac{\sigma^4}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha\Delta t})} \right) & \frac{\alpha T}{2\sigma^2} + \frac{\Delta t T}{\sigma^2} e^{-2\alpha\Delta t} \\ \frac{2\alpha T \sum_{t=1}^T ((x_{t-1} - \mu) \Delta t e^{-\alpha\Delta t})}{\sigma^2(1+e^{-\alpha\Delta t})} & \frac{\alpha T}{2\sigma^2} + \frac{\Delta t T}{\sigma^2} e^{-2\alpha\Delta t} & -\frac{1}{\bar{\sigma}^2} \sum_{t=1}^T (x_{t-1} - \mu)^2 \Delta t^2 e^{-2\alpha\Delta t} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (24)$$

数値計算上は一階微分を計算する際に得られた (μ, σ^2, α) を上式に代入し、固有値分解を行うことで固有値が負であることを確認してゆけばよい。固有値分解を行うアルゴリズムは容易に入手できるので、現実的である。しかし、

もちろん上で与えられた行列から負定値性を確認することもできる。実際、 H の小行列の行列式を見てゆくと、 $|H_{1,1}| \leq 0$ 、 $|H_{2,2}| \geq 0$ が容易にわかる。また、 H の行列式は

$$|H| = \frac{T(1 - e^{-\alpha\Delta t})}{\bar{\sigma}^2} \sum_{t=1}^T (-1 + e^{-\alpha\Delta t}) \left| \begin{array}{cc} \frac{T}{2\sigma^2} \left(-\frac{\sum_{t=1}^T (x_t - \mu - (x_{t-1} - \mu)e^{-\alpha\Delta t})^2 / T}{\frac{\sigma^4}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha\Delta t})} \right) & \frac{\alpha T}{2\sigma^2} + \frac{\Delta t T}{\sigma^2} e^{-2\alpha\Delta t} \\ \frac{\alpha T}{2\sigma^2} + \frac{\Delta t T}{\sigma^2} e^{-2\alpha\Delta t} & -\frac{1}{\bar{\sigma}^2} \sum_{t=1}^T (x_{t-1} - \mu)^2 \Delta t^2 e^{-2\alpha\Delta t} \end{array} \right|$$

$$+ \frac{2\alpha T}{\sigma^2(1 + e^{-\alpha\Delta t})} \sum_{t=1}^T ((x_{t-1} - \mu)\Delta t e^{-\alpha\Delta t}) \left| \begin{array}{cc} 0 & \frac{\alpha T}{2\sigma^2} + \frac{\Delta t T}{\sigma^2} e^{-2\alpha\Delta t} \\ \frac{2\alpha T \sum_{t=1}^T ((x_{t-1} - \mu)\Delta t e^{-\alpha\Delta t})}{\sigma^2(1 + e^{-\alpha\Delta t})} & -\frac{1}{\bar{\sigma}^2} \sum_{t=1}^T (x_{t-1} - \mu)^2 \Delta t^2 e^{-2\alpha\Delta t} \end{array} \right| \quad (25)$$

$$= \frac{T(1 - e^{-\alpha\Delta t})}{\bar{\sigma}^2} \sum_{t=1}^T (-1 + e^{-\alpha\Delta t}) \left| \begin{array}{cc} \frac{T}{2\sigma^2} \left(-\frac{\sum_{t=1}^T (x_t - \mu - (x_{t-1} - \mu)e^{-\alpha\Delta t})^2 / T}{\frac{\sigma^4}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha\Delta t})} \right) & \frac{\alpha T}{2\sigma^2} + \frac{\Delta t T}{\sigma^2} e^{-2\alpha\Delta t} \\ \frac{\alpha T}{2\sigma^2} + \frac{\Delta t T}{\sigma^2} e^{-2\alpha\Delta t} & -\frac{1}{\bar{\sigma}^2} \sum_{t=1}^T (x_{t-1} - \mu)^2 \Delta t^2 e^{-2\alpha\Delta t} \end{array} \right| \quad (26)$$

であるが、これが負値であることは明らかである。

以上で、実データからOU過程のパラメータ μ, α, σ を得られる。もちろん、本文中で言及したように、このようにして最尤法を用いて得られたパラメータは推定誤差を含んでいる可能性があり、したがって閾値 $b(t)$ を求める際にはこの点を勘案し修正したものを用いるほうが戦略として「頑健」である。

References

- Avellaneda, M. and J. Lee (2010). Statistical arbitrage in the US equities market. *Quantitative Finance* 10, 761–782.
- Bekiros, S. (2014). Timescale analysis with an entropy-based shift-invariant discrete wavelet transform. *Computational Economics* 44(2), 231–251.
- Bowden, R. (2011). Directional entropy and tail uncertainty, with applications to financial hazard. *Quantitative Finance* 11(3), 437–446.
- Caporale, G., L. Gil-Alana, and A. Plastun (2017). Searching for Inefficiencies in Exchange Rate Dynamics. *Computational Economics* 49(3), 405–432.
- Chen, C. and T. Lin (2017). Nonparametric tolerance limits for pair trading. *Finance Research Letters* 21, 1–9.
- Chen, C., Z. Wang, S. Sriboonchitta, and S. Lee (2017). Pair trading based on quantile forecasting of smooth transition GARCH models. *North American Journal of Economics and Finance* 39, 38–55.

- Detlefsen, K. and G. Scandolo (2005). Conditional and dynamic convex risk measures. *Finance and Stochastics* 9, 539–561.
- Ekström, E., C. Lindberg, and J. Tysk (2011). Optimal liquidation of a pairs trade. In G. Nunno and B. Øksendal (Eds.), *Advanced Mathematical Methods for Finance*. Berlin: Springer.
- Elliott, R., J. Van Der Hoek, and W. Malcolm (2005). Pairs trading. *Quantitative Finance* 5, 271–276.
- Föllmer, H. and I. Penner (2006). Convex risk measures and the dynamics of their penalty functions. *Statistics & Decisions* 24, 61–96.
- Gatev, E., W. Goetzman, and K. Rouwenhorst (2006). Pairs trading: Performance of a relative-value arbitrage rule. *Review of Financial Studies* 19, 787–827.
- Gencay, R. and N. Gradojevic (2010). Crash of '87 - was it expected? Aggregate market fears and long range dependence. *Journal of Empirical Finance* 17(2), 270–282.
- Gradojevic, N. and M. Caric (2017). Predicting systemic risk with entropic indicators. *Journal of Forecasting* 36(1), 16–25.
- Gradojevic, N. and R. Gencay (2008). Overnight interest rates and aggregate market expectations. *Economics Letters* 100(1), 27–30.
- Gradojevic, N. and R. Gencay (2013). Fuzzy logic, trading uncertainty and technical trading. *Journal of Banking & Finance* 37, 578–586.
- Kakushadze, Z. (2015). Mean-reversion and optimization. *Journal of Asset Management* 16(1), 14–40.
- Kitamura, Y. and M. J. Stutzer (2002). Connections between entropic and linear projections in asset pricing estimation. *Journal of Econometrics* 107, 159–174.
- Krätschmer, V., M. Ladkau, R. Laeven, J. Schoenmakers, and M. Stadje (2015). Robust optimal stopping. preprint.
- Krätschmer, V. and J. Schoenmakers (2010). Representations for optimal stopping under dynamic monetary utility functionals. *SIAM Journal on Financial Mathematics* 1, 811–832.
- Peskir, G. and A. Shiryaev (2006). *Optimal stopping and free-boundary problems*. Birkhäuser Verlag.

- Riedel, F. (2009). Optimal stopping with multiple priors. *Econometrica* 77, 857–908.
- Serguieva, A. and J. Hunter (2004). Fuzzy interval methods in investment risk appraisal. *Fuzzy Sets and Systems* 142, 443–466.
- Stutzer, M. J. (2000). Simple entropic derivation of a generalized Black-Scholes option pricing model. *Entropy* 2, 70–77.
- Yang, J. and W. Qiu (2005). A measure of risk and a decision-making model based on expected utility and entropy. *European Journal of Operational Research* 164(3), 792–799.
- Zadeh, L. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control* 8, 338–353.
- Zhou, X. and M. Dong (2004). Can fuzzy logic make technical analysis 20/20? *Financial Analyst Journal* 60(4), 54–75.